Plaquette 4 – Extremums sous contrainte : vecteurs tangents et multiplicateurs de Lagrange

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vecteurs tangents. v est tangent à X en a s'il existe une courbe γ dérivable tracée sur X avec $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$. Si $X = \{g = 0\}$ avec $\nabla g(a) \neq 0$: $T_a X = \nabla g(a)^{\perp}$.

Condition nécessaire. Si $f_{|X}$ a un extremum local en a, alors $\nabla f(a) \perp T_a X$, d'où (si $\nabla g(a) \neq 0$) :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

Quotient de Rayleigh. Pour A symétrique : $\max_{\|x\|=1} x^{\mathsf{T}} A x = \lambda_{\max}$, $\min = \lambda_{\min}$, atteints sur les vecteurs propres associés.

Correction de l'exercice 1 – Un produit maximal sous contrainte de somme

a) X est compact (fermé, borné), f continue. $f = 0$ dès qu'une coordonnée est nulle, et $f > 0$ ailleurs.

b) Avec $g = x + y + z - 6$: $y^2 z^3 = \lambda$, $2xyz^3 = \lambda$, $3xy^2 z^2 = \lambda$. En égalant la première et la deuxième (après division par $yz^3 > 0$) : $y = 2x$; la première et la troisième : $z = 3x$. La contrainte donne $6x = 6$.

c) Le maximum est atteint en $(1, 2, 3)$:

$$\max_X f = 1 \cdot 4 \cdot 27 = 108$$

Réponse. Maximum 108 en $(1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 2 – Forme quadratique sur la sphère

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\nabla q = 2AX$ et $\nabla g = 2X$ pour $g = \|X\|^2 - 1$.

b) Le bloc $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et 3 ; avec 5 : $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3, 5\}$.

c) Aux points de Lagrange, $q(X) = \lambda \|X\|^2 = \lambda$. Par compacité :

$$\max_S q = 5 \text{ en } \pm(0, 0, 1), \qquad \min_S q = 1 \text{ en } \pm \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}$$

Réponse. Maximum 5 en $\pm(0, 0, 1)$, minimum 1 en $\pm\frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 3 – Distance d'un point à un plan

a) $2(x - a) = \lambda n$ et $\langle n, x \rangle = c$ (le minimum existe : P fermé, fonction coercive).

b) $x = a + \frac{\lambda}{2} n$ et $\langle n, a \rangle + \frac{\lambda}{2} \|n\|^2 = c$, d'où $\frac{\lambda}{2} = \frac{c - \langle n, a \rangle}{\|n\|^2}$ et

$$\|x - a\| = \frac{|\lambda|}{2} \|n\| = \frac{|\langle n, a \rangle - c|}{\|n\|}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\dfrac{|1+4+6-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{10}{3}$.

Réponse. $d(a,P) = \dfrac{|\langle n,a\rangle - c|}{\|n\|}$; ici $\dfrac{10}{3}$.

Correction de l'exercice 4 – Point d'une ellipse le plus proche

a) $2(x-1) = \lambda\frac{x}{2}$, $2y = 2\lambda y$, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

b) Si $y = 0$: $x = \pm 2$. Si $\lambda = 1$: $2x - 2 = \frac{x}{2}$, d'où $x = \frac{4}{3}$ et $y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

c) $d^2(2,0) = 1$, $d^2(-2,0) = 9$ et $d^2\left(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2}{3}$. Par compacité de E :

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ en } \left(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right), \qquad d_{\max} = 3 \text{ en } (-2,0)$$

Le sommet $(2,0)$, pourtant le plus proche sur l'axe, n'est pas le point le plus proche.

Réponse. $d_{\min} = \sqrt{2/3}$ en $\left(\frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, $d_{\max} = 3$ en $(-2,0)$.

Correction de l'exercice 5 – Inégalité arithmético-géométrique

a) X est compact, f continue, nulle sur le bord et strictement positive en $(1,\dots,1)$.

b) $\partial_i f = \dfrac{f(x)}{x_i} = \lambda$ pour tout i : tous les x_i sont égaux, donc égaux à 1, et $f = 1$.

c) Avec $m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ et $x_i = \dfrac{a_i}{m}$ (de somme n) : $\prod \dfrac{a_i}{m} \le 1$, soit

$$a_1 \cdots a_n \le m^n$$

Réponse. $\max_X f = 1$ en $(1,\dots,1)$, d'où $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \le \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

Correction de l'exercice 6 – Espace tangent à la sphère

a) $2\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$ en $t = 0$ donne $\langle a, v\rangle = 0$.

b) Si $v = 0$, la courbe constante convient ; sinon $\gamma(t) = \cos(t\|v\|)a + \sin(t\|v\|)\frac{v}{\|v\|}$ reste sur S (base orthonormée a, $\frac{v}{\|v\|}$) et $\gamma'(0) = v$.

c) Pour toute courbe γ sur S issue de a, $f\circ\gamma$ a un extremum en 0 : $\langle \nabla f(a), v\rangle = 0$ pour tout $v \perp a$, donc $\nabla f(a) \in (a^\perp)^\perp = \mathbb{R}a$. Pour $f = \langle u, \cdot\rangle$ ($u \neq 0$), $\nabla f = u$, donc $a = \pm\frac{u}{\|u\|}$ et

$$\max_S f = \|u\|$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Réponse. $T_aS = a^\perp$; en un extremum $\nabla f(a) \in \mathbb{R}a$; $\max_S \langle u, x\rangle = \|u\|$.

Correction de l'exercice 7 – Rectangle inscrit dans une ellipse

a) $A = 4xy$; $4y = \dfrac{2\lambda x}{a^2}$ et $4x = \dfrac{2\lambda y}{b^2}$. Le maximum existe (arc d'ellipse compact, $A = 0$ aux extrémités).

b) En multipliant la première par x et la seconde par y : $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}$, donc chacun vaut $\frac{1}{2}$:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad A_{\max} = 2ab$$

c) Le rapport $\dfrac{2ab}{\pi ab} = \dfrac{2}{\pi} \approx 64\ \%$ ne dépend pas de l'ellipse (image d'un cercle par une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

affinité, qui multiplie toutes les aires par le même facteur).

Réponse. Sommet $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, aire maximale $2ab$.

Correction de l'exercice 8 – Cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère

a) $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$.

b) $2\pi r h = 2\lambda r$ et $\pi r^2 = \frac{\lambda h}{2}$. La première donne $\lambda = \pi h$, puis $r^2 = \frac{h^2}{2}$. Avec la contrainte : $\frac{3h^2}{4} = R^2$, d'où $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $r^2 = \frac{2R^2}{3}$ et

$$V_{\max} = \pi \cdot \frac{2R^2}{3} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$$

c) $\frac{V_{\max}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 58\ \%$.

Réponse. $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $V_{\max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$, soit $\frac{1}{\sqrt{3}}$ du volume de la boule.

Correction de l'exercice 9 – Fonction de production sous contrainte de budget

a) $\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} = 2\lambda$ et $\frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3} = \lambda$.

b) En divisant : $\frac{y}{2x} = 2$, soit $y = 4x$. Le budget donne $6x = 12$: $x = 2$, $y = 8$, et

$$P(2, 8) = 2^{1/3} \cdot 4 = 4\sqrt[3]{2} \approx 5{,}04$$

(c'est un maximum : P est continue sur le segment compact de contrainte et nulle à ses extrémités).

c) Le travail coûte $2x = 4$, soit $\frac{1}{3}$ du budget : la part de chaque facteur égale son exposant, propriété générale des fonctions de Cobb-Douglas.

Réponse. $x = 2$, $y = 8$, production $4\sqrt[3]{2}$; $\frac{1}{3}$ du budget pour le travail.

Correction de l'exercice 10 – Entropie maximale

a) $t \mapsto t\ln t$ se prolonge par continuité en 0 ; Δ est compact.

b) $-\ln p_i - 1 = \lambda$ pour tout i : les p_i sont égaux, donc égaux à $\frac{1}{n}$, et $H = \ln n$.

c) Pour $n = 1$, $H = 0 = \ln 1$. Un point du bord a une coordonnée nulle : $H(p)$ est alors l'entropie d'une loi sur $n - 1$ valeurs, au plus $\ln(n-1) < \ln n$ par récurrence. Le maximum, atteint, est donc intérieur, en un point de Lagrange :

$$\max_{\Delta} H = \ln n$$

atteint pour la loi uniforme.

Réponse. Maximum $\ln n$ pour la loi uniforme $p_i = \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 11 – Quand le gradient de la contrainte s'annule

a) Sur X, $x^3 = y^2 \geq 0$, donc $x \geq 0 = f(0,0)$.

b) $\nabla f = (1, 0)$ et $\nabla g(0,0) = (-3x^2, 2y)_{|(0,0)} = (0, 0)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(1,0) \neq \lambda(0,0)$$

c) L'hypothèse $\nabla g(a) \neq 0$. La courbe présente un point de rebroussement en 0 ($y = \pm x^{3/2}$) : il n'y a pas de tangente au sens usuel, et la méthode de Lagrange « oublie » ce point. On doit toujours examiner séparément les points de X où $\nabla g = 0$.

Réponse. Minimum en 0, où $\nabla g = 0$: aucun multiplicateur, il faut traiter ces points à part.

Correction de l'exercice 12 – Le point le plus chaud d'une sphère

a) $400yz^2 = 2\lambda x$, $400xz^2 = 2\lambda y$, $800xyz = 2\lambda z$.

b) On obtient $400xyz^2 = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$ et $800xyz^2 = 2\lambda z^2$. Si $T \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$, d'où $x^2 = y^2$ et $z^2 = 2x^2$.

c) La contrainte donne $4x^2 = 1$: $x^2 = y^2 = \frac{1}{4}$, $z^2 = \frac{1}{2}$, et $T = 400\,xy \cdot \frac{1}{2}$ avec $xy = \pm\frac{1}{4}$:

$$T_{\max} = 50, \qquad T_{\min} = -50$$

atteints respectivement pour $x = y = \pm\frac{1}{2}$ et $x = -y = \pm\frac{1}{2}$, avec $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réponse. $T_{\max} = 50$ (pour $xy = \frac{1}{4}$, $z^2 = \frac{1}{2}$), $T_{\min} = -50$.

Correction de l'exercice 13 – Extremums de la distance sur une ellipse inclinée

a) $2x = \lambda(2x + y)$ et $2y = \lambda(x + 2y)$.

b) En soustrayant puis en additionnant : $(x - y)(2 - \lambda) = 0$ et $(x + y)(2 - 3\lambda) = 0$. Si $y = x$: $3x^2 = 3$, points $\pm(1,1)$, $f = 2$. Si $y = -x$: $x^2 = 3$, points $\pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $f = 6$. Par compacité :

$$\min_E f = 2, \qquad \max_E f = 6$$

c) Les demi-axes de l'ellipse valent $\sqrt{2}$ (direction $(1,1)$) et $\sqrt{6}$ (direction $(1,-1)$) : le cercle $x^2 + y^2 = c$ est tangent à E exactement pour $c = 2$ et $c = 6$.

Réponse. $\min f = 2$ en $\pm(1,1)$, $\max f = 6$ en $\pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$: demi-axes $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$.

Correction de l'exercice 14 – Cauchy-Schwarz par les multiplicateurs

a) $2a_i x_i = \lambda$, donc $x_i = \frac{\lambda}{2a_i}$; la contrainte donne $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\sum_j 1/a_j}$, et

$$f_{\min} = \sum_i a_i \frac{\lambda^2}{4a_i^2} = \frac{\lambda^2}{4}\sum_i \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\sum_i 1/a_i}$$

b) f est continue et coercive sur l'hyperplan fermé : le minimum existe et c'est l'unique point de Lagrange. (On retrouve Cauchy-Schwarz : $1 = \left(\sum x_i\right)^2 \leq \sum a_i x_i^2 \sum \frac{1}{a_i}$.)

c) $\sum \frac{1}{a_i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$: minimum $\frac{6}{11}$ en $x = \frac{6}{11}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

Réponse. $f_{\min} = \left(\sum \frac{1}{a_i}\right)^{-1}$; pour $a = (1,2,3)$: $\frac{6}{11}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la loi de la réfraction

a) $\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)'' = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} > 0$ (de même pour l'autre terme), et $T(x) \geq \frac{|x|}{v_1} \to +\infty$.

b) T atteint un minimum, unique par stricte convexité, en l'unique zéro de T'. Or

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$T'(0) = -\dfrac{d}{v_2\sqrt{d^2+b^2}} < 0$ et $T'(d) = \dfrac{d}{v_1\sqrt{d^2+a^2}} > 0$: il est dans $]0,d[$.

c) $T'(x) = \dfrac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \dfrac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$, et

$$\sin i_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad \sin i_2 = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

donc $T'(x) = 0$ s'écrit $\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$, soit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ avec $n_k = \dfrac{c}{v_k}$.

Réponse. Minimum unique dans $]0,d[$, caractérisé par $\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).