Plaquette 2 – Points critiques, hessienne et nature des extremums locaux

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taylor-Young à l'ordre 2 (f de classe C^2, a critique) :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^{\mathsf{T}} H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

Condition nécessaire. En un minimum local intérieur : $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a)$ positive.

Condition suffisante. $\nabla f(a) = 0$ et $H_f(a)$ définie positive $\Rightarrow$ minimum local strict.

En dimension 2, avec $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$: $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (minimum), $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ (maximum), $rt - s^2 < 0$ (col), $rt - s^2 = 0$ (indécis).

Correction de l'exercice 1 – Un minimum local qui n'est pas global

a) $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$: $y = x^2$ et $x = x^4$, d'où $(0,0)$ et $(1,1)$.

b) $H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$. En $(0,0)$: $rt - s^2 = -9 < 0$, point col. En $(1,1)$: $rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ et $r = 6 > 0$, minimum local strict, avec

$$f(1,1) = -1$$

c) Non : $f(x,0) = x^3 \to -\infty$ quand $x \to -\infty$.

Réponse. Col en $(0,0)$, minimum local -1 en $(1,1)$, non global.

Correction de l'exercice 2 – Points critiques avec un cas dégénéré

a) $4x^3 - 4(x-y) = 0$ et $4y^3 + 4(x-y) = 0$: en additionnant, $x^3 = -y^3$, donc $y = -x$, puis $4x^3 - 8x = 0$.

b) $H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$. En $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $H = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, $rt - s^2 = 384 > 0$, minimum local, $f = -8$. À l'origine $rt - s^2 = 0$: indécis. Mais $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0 \quad \text{pour } 0 < |x| < \sqrt{2}$$

donc l'origine n'est pas un extremum.

c) $2(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)$ et $x^4 + y^4 \ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$, donc $f \to +\infty$ à l'infini (coercive) : le minimum global est atteint en un point critique, c'est -8.

Réponse. Origine : pas d'extremum ; minimum global -8 en $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Correction de l'exercice 3 – Nature par un développement limité

a) $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ avec $u = x^2 + y^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + o(x^2+y^2)$$

b) La forme quadratique $x^2 - xy + y^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$: définie positive, l'origine est un minimum local strict ($f(0,0)=0$).

c) Non : $f(t,t)=\ln(1+2t^2)-t^2\to-\infty$.

Réponse. Minimum local strict en 0 (forme x^2-xy+y^2), non global.

Correction de l'exercice 4 – Trois fonctions de même hessienne

a) Les gradients s'annulent en 0 et les trois hessiennes valent $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, positive mais dégénérée.

b) $f_1\geq 0=f_1(0,0)$ avec égalité seulement en 0 : minimum strict.
$f_2(0,y)=-y^4<0<f_2(x,0)$: col. $f_3(0,y)=y^3$ change de signe : pas d'extremum.

c) Une hessienne dégénérée ne permet pas de conclure ; le terme décisif est d'ordre supérieur, ici dans la direction du noyau :

$$\ker H=\mathbb{R}(0,1)$$

Réponse. Minimum pour f_1, col pour f_2, ni l'un ni l'autre pour f_3 : le test d'ordre 2 est muet.

Correction de l'exercice 5 – La selle de singe

a) $\nabla f=(3x^2-3y^2,-6xy)$: $xy=0$ et $x^2=y^2$ imposent $x=y=0$. Les dérivées secondes $6x$, $-6y$, $-6x$ s'annulent en 0.

b) $f=\mathrm{Re}(x+iy)^3=\mathrm{Re}\left(r^3\mathrm{e}^{3i\theta}\right)=r^3\cos 3\theta$.

c) $\cos 3\theta$ change de signe : f est positive sur trois secteurs d'angle $\frac{\pi}{3}$ et négative sur les trois autres, par exemple

$$f>0 \text{ pour } |\theta|<\frac{\pi}{6}$$

La surface a trois « creux » (deux pour les jambes, un pour la queue du singe).

Réponse. $f=r^3\cos 3\theta$: six secteurs de signes alternés, pas d'extremum en 0.

Correction de l'exercice 6 – Condition nécessaire d'ordre deux

a) φ admet un minimum local en 0, donc $\varphi'(0)=0$ et $\varphi''(0)\geq 0$ (sinon Taylor-Young donnerait $\varphi(t)<\varphi(0)$ pour t petit). Or $\varphi''(0)=h^{\mathsf{T}}H_f(a)h$.

b) $f(x,y)=x^2-y^4$: hessienne $\mathrm{diag}(2,0)$ positive, mais l'origine est un col.

c) $\nabla f(0)=0$ et $H=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$, de valeurs propres 5 et -1 : ni positive ni négative, donc

l'origine n'est ni un minimum ni un maximum local

Réponse. $H_f(a)$ positive en un minimum ; non suffisant (x^2-y^4) ; c) pas d'extremum (valeurs propres 5 et -1).

Correction de l'exercice 7 – Minimum sur toute droite mais pas minimum local

a) Sur l'axe $x=0$: $f=y^2$. Sur $y=mx$: $f=(mx-x^2)(mx-2x^2)=m^2x^2-3mx^3+2x^4$, qui vaut $m^2x^2+o(x^2)$ si $m\neq 0$, et $2x^4$ si $m=0$: minimum local strict en 0 dans tous les cas.

b) Sur la parabole $y=\frac{3}{2}x^2$, située entre les deux paraboles :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^4}{4} < 0$$

c) $f = y^2 - 3x^2y + 2x^4$, de hessienne $\mathrm{diag}(0, 2)$ en 0 : dégénérée, d'où l'échec possible des tests « par droites ».

Réponse. Minimum sur chaque droite, mais $f < 0$ sur $y = \frac{3}{2}x^2$: pas de minimum local (hessienne dégénérée).

Correction de l'exercice 8 – Un cercle de minimums

a) $\nabla f = 4(x^2 + y^2 - 1)(x, y)$ s'annule à l'origine et sur tout le cercle unité.

b) $f = 1 - 2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2$: la hessienne en 0 est $-4I_2$, définie négative, maximum local strict ($f(0, 0) = 1$).

c) Avec $u = x^2 + y^2 - 1$, $f = u^2$ et $H_f = 2\nabla u \nabla u^{\mathsf{T}} + 2uH_u$. Sur le cercle, $u = 0$ et

$$H_f(x, y) = 8\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

de rang 1 : dans la direction tangente au cercle, f reste nulle. Ces points sont des minimums globaux non stricts.

Réponse. Maximum local en 0 ; cercle de minimums globaux non stricts, hessienne de rang 1.

Correction de l'exercice 9 – Cinq points critiques en dimension trois

a) $x = yz$, $y = xz$, $z = xy$. Si l'un est nul, tous le sont. Sinon $x^2 = xyz = y^2 = z^2$ et $xyz = x^2$ donne $|x| = 1$: points $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$.

b) $H(0) = 2I_3$: minimum local strict.

c) $H(1, 1, 1) = 4I_3 - 2J$, avec J la matrice remplie de 1, de valeurs propres $3, 0, 0$: H a pour valeurs propres $-2, 4, 4$, c'est un col. Le changement de variables $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ (et ses analogues) laisse f invariante et échange les quatre points :

les quatre points non nuls sont des cols

Réponse. Minimum local en 0 ; quatre cols en $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ avec $xyz = 1$.

Correction de l'exercice 10 – Nature selon un paramètre

a) $\nabla f_a(0) = 0$ et $H = 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $2(1 \pm a)$.

b) Si $|a| < 1$, H est définie positive : minimum local strict. Si $|a| > 1$, les valeurs propres sont de signes opposés : col.

c) Pour $a = \pm 1$, H est dégénérée, mais

$$f_{\pm 1}(x, y) = (x \pm y)^2 + x^4 \geq 0$$

avec égalité seulement si $x = 0$ et $x \pm y = 0$: minimum strict (et même global).

Réponse. Minimum strict pour $|a| \leq 1$ (dégénéré si $|a| = 1$), col pour $|a| > 1$.

Correction de l'exercice 11 – Le triangle aux sinus maximaux

a) $\cos x + \cos(x + y) = 0$ et $\cos y + \cos(x + y) = 0$ donnent $\cos x = \cos y$, donc $x = y$ sur $]0, \pi[$. Puis $\cos x + \cos 2x = 0$, soit $2c^2 + c - 1 = 0$ avec $c = \cos x$: $c = \frac{1}{2}$ ($c = -1$ est exclu),

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x = y = \frac{\pi}{3}$.

b) $f_{xx} = -\sin x - \sin(x+y) = -\sqrt{3}$, $f_{yy} = -\sqrt{3}$, $f_{xy} = -\sin(x+y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $rt - s^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$ et $r < 0$, maximum local, de valeur

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c) Si x, y, $z = \pi - x - y$ sont les angles d'un triangle, $\sin z = \sin(x+y)$: la somme des sinus est localement maximale pour le triangle équilatéral.

Réponse. Unique point critique $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, maximum local $\frac{3\sqrt{3}}{2}$: triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 12 – Un point critique non dégénéré est isolé

a) ∇f est de classe C^1, de différentielle en a égale à $H_f(a)$ (matrice jacobienne du gradient), et $\nabla f(a) = 0$.

b) $H = H_f(a)$ étant inversible, $\|Hh\| \geq c\|h\|$ avec $c = \|H^{-1}\|^{-1} > 0$. Pour $\|h\|$ assez petit, le reste est majoré par $\frac{c}{2}\|h\|$, donc

$$\|\nabla f(a+h)\| \geq \frac{c}{2}\|h\| > 0 \quad (h \neq 0)$$

c) Non : pour $(x^2 + y^2 - 1)^2$, les points critiques du cercle unité ne sont pas isolés, et la hessienne y est de rang 1.

Réponse. $\|\nabla f(a+h)\| \geq \frac{c}{2}\|h\|$ près de a : point critique isolé ; faux en général si H est dégénérée.

Correction de l'exercice 13 – Fonction symétrique de trois variables

a) $\nabla f = (y+z, x+z, x+y) = 0$: en sommant, $x + y + z = 0$, puis $x = y = z = 0$.

b) $H = J - I_3$ (J remplie de 1), de valeurs propres $3 - 1 = 2$ et $0 - 1 = -1$ (double).

c) Col. Pour $h = t(1,1,1)$: $f = 3t^2 > 0$. Pour $h = t(1,-1,0)$:

$$f(t, -t, 0) = -t^2 < 0$$

Réponse. Valeurs propres $2, -1, -1$: col ; f croît selon $(1,1,1)$, décroît selon $(1,-1,0)$.

Correction de l'exercice 14 – Extremums d'une gaussienne modulée

a) Avec $E = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$: $\partial_x f = (1 - x^2)E$ et $\partial_y f = -xyE$, nuls en $(\pm 1, 0)$.

b) $f_{xx} = (x^3 - 3x)E$, $f_{xy} = -y(1-x^2)E$, $f_{yy} = -x(1-y^2)E$. En $(1,0)$: $H = \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{diag}(-2,-1)$, définie négative, maximum local. En $(-1,0)$: $H = \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{diag}(2,1)$, minimum local.

c) $|f(x,y)| \leq |x|\mathrm{e}^{-x^2/2}$, et $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est maximale en $t = 1$, donc

$$-\mathrm{e}^{-1/2} \leq f \leq \mathrm{e}^{-1/2}$$

avec égalité en $(\mp 1, 0)$ et $(\pm 1, 0)$ respectivement.

Réponse. Maximum global $\mathrm{e}^{-1/2}$ en $(1,0)$, minimum global $-\mathrm{e}^{-1/2}$ en $(-1,0)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction de Rosenbrock

a) $\partial_y f = 200(y - x^2) = 0$ impose $y = x^2$, puis $\partial_x f = -2(1-x) - 400x(y - x^2) = -2(1-x) = 0$: seul point critique $(1,1)$. Avec $f_{xx} = 2 - 400(y - x^2) + 800x^2 = 802$, $f_{xy} = -400x = -400$, $f_{yy} = 200$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$rt - s^2 = 802 \times 200 - 400^2 = 400 > 0, \quad r > 0$$

minimum local.

b) $f \geq 0 = f(1,1)$.

c) Trace 1002, déterminant 400 : $\lambda_1 \approx 1001{,}6$ et $\lambda_2 \approx 0{,}40$, de rapport ≈ 2500. Les lignes de niveau sont des ellipses très allongées (une vallée étroite et courbe) : le gradient pointe presque perpendiculairement au fond de la vallée et la descente zigzague.

Réponse. Unique minimum global 0 en $(1,1)$; valeurs propres $\approx 1001{,}6$ et $0{,}40$: très mal conditionné.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).