Plaquette 5 – Synthèse : problèmes d'optimisation en géométrie, analyse et algèbre linéaire

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Moindres carrés. $x \mapsto \|Ax-b\|^2$ est minimale exactement aux solutions de $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$ (projection orthogonale de b sur $\mathrm{Im}A$).

Gradient d'une norme. $\nabla\|x-a\| = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ pour $x \neq a$ (vecteur unitaire).

Quotient de Rayleigh. Pour A symétrique, $R(x) = \dfrac{x^{\mathsf{T}}Ax}{\|x\|^2}$ vérifie

$$\nabla R(x) = \frac{2}{\|x\|^2}(Ax - R(x)x)$$

ses points critiques sont les vecteurs propres, et $\lambda_{\min} \leq R \leq \lambda_{\max}$.

Correction de l'exercice 1 – Le point de Fermat d'un triangle

a) Chaque $M \mapsto \|M-A\|$ est convexe (inégalité triangulaire), donc f aussi, et $f(M) \geq MA \to +\infty$.

b) $\nabla f(M) = u_A + u_B + u_C$ avec $u_P = \dfrac{M-P}{\|M-P\|}$ unitaires. Trois vecteurs unitaires sont de somme nulle si et seulement s'ils forment des angles de $\frac{2\pi}{3}$ deux à deux (car $\|u_A+u_B\| = \|u_C\| = 1$ impose $\langle u_A, u_B\rangle = -\frac{1}{2}$). Par convexité, un tel point est le minimum global.

c) Par symétrie, le centre O convient (il voit chaque côté sous l'angle $\frac{2\pi}{3}$). Le rayon du cercle circonscrit est $\frac{2}{\sqrt{3}}$, d'où

$$f_{\min} = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Réponse. Point où les côtés sont vus sous 120° ; pour le triangle équilatéral de côté 2 : le centre, $f_{\min} = 2\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Équations normales des moindres carrés

a) $F(x+h) = F(x) + 2\langle Ax-b, Ah\rangle + \|Ah\|^2$, donc $\nabla F(x) = 2A^{\mathsf{T}}(Ax-b)$, et $H_F = 2A^{\mathsf{T}}A$ est positive.

b) Pour une fonction convexe, minimum $\Leftrightarrow$ point critique. Si $\mathrm{rg}A = n$, $A^{\mathsf{T}}A$ est inversible ($A^{\mathsf{T}}Ax = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$).

c) Ici $A = (1,4,9)^{\mathsf{T}}$ et $b = (1,5,8)$:

$$a = \frac{A^{\mathsf{T}}b}{A^{\mathsf{T}}A} = \frac{1+20+72}{1+16+81} = \frac{93}{98} \approx 0{,}949$$

Réponse. Minimum $\Leftrightarrow A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$; ajustement $a = \frac{93}{98}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Triangle d'aire maximale à périmètre fixé

a) Les inégalités triangulaires équivalent à $u, v, w > 0$, et $u + v + w = 3p - 2p = p$. On maximise uvw sur $\{u, v, w \geq 0, u + v + w = p\}$, compact.

b) Le maximum est intérieur ($uvw = 0$ au bord), Lagrange donne $vw = uw = uv$, donc $u = v = w = \frac{p}{3}$ (c'est aussi l'inégalité arithmético-géométrique).

c) $a = b = c = \frac{2p}{3}$: triangle équilatéral, et

$$A_{\max} = \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Réponse. Le triangle équilatéral, d'aire $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 4 – Convergence de la descente de gradient

a) $\nabla f(x) = Ax$, donc $x_{k+1} = (I_n - \tau A)x_k$.

b) En base orthonormée propre, chaque coordonnée est multipliée par $1 - \tau\lambda_i$ à chaque pas. La convergence pour tout x_0 équivaut à $|1 - \tau\lambda_i| < 1$ pour tout i, soit $0 < \tau\lambda_i < 2$, c'est-à-dire $\tau < \frac{2}{\lambda_n}$.

c) $\rho(\tau) = \max(|1 - \tau\lambda_1|, |1 - \tau\lambda_n|)$ est minimal quand $1 - \tau\lambda_1 = \tau\lambda_n - 1$, soit $\tau = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$, et alors

$$\rho = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

Pour $\kappa = 2500$: $\rho \approx 0{,}9992$; il faut environ 2900 itérations pour diviser l'erreur par 10.

Réponse. Convergence ssi $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_n}$; facteur optimal $\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$ ($\approx 0{,}9992$ pour $\kappa = 2500$).

Correction de l'exercice 5 – Polygone inscrit de périmètre maximal

a) Une corde interceptant un arc d'angle θ mesure $2\sin\frac{\theta}{2}$.

b) $\cos\frac{\theta_i}{2} = \lambda$ pour tout i, et cos est injective sur $]0, \pi[$ où vivent les $\frac{\theta_i}{2}$: les θ_i sont égaux à $\frac{2\pi}{n}$.

c) sin est concave sur $[0, \pi]$, donc P est concave sur le convexe des contraintes, et un point critique sous contrainte affine y est un maximum global (inégalité de Jensen). Polygone régulier :

$$P_{\max} = 2n\sin\frac{\pi}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\pi$$

Réponse. Le polygone régulier, de périmètre $2n\sin\frac{\pi}{n} \to 2\pi$.

Correction de l'exercice 6 – Distance entre deux droites de l'espace

a) $f(s, t) = s^2 + (1 + t)^2 + t^2$.

b) f est strictement convexe (somme de carrés, hessienne diag(2, 4)), minimale en $s = 0$, $t = -\frac{1}{2}$:

$$f_{\min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad d(D_1, D_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Les points sont $P = (0, 0, 0)$ et $Q = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{PQ}$ est orthogonal à $u = (1, 0, 0)$ et à

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$v = (0,1,1)$. Avec $u \wedge v = (0,-1,1)$ et $\overrightarrow{AB} = (0,1,0)$: $\frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓.

Réponse. $d(D_1, D_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, atteinte entre $(0,0,0)$ et $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 7 – Profit maximal pour deux produits

a) $\Pi = 10x + 8y - x^2 - xy - y^2$, de hessienne $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, définie négative (valeurs propres -1 et -3).

b) $10 - 2x - y = 0$ et $8 - x - 2y = 0$: $x = 4$, $y = 2$, maximum global par concavité.

c) $\Pi(4,2) = 40 + 16 - 16 - 8 - 4 = 28$. Les coûts marginaux :

$$\partial_x C = 2x + y = 10, \qquad \partial_y C = x + 2y = 8$$

égaux aux prix : c'est la condition d'optimalité « prix = coût marginal ».

Réponse. Production $(4,2)$, profit maximal 28.

Correction de l'exercice 8 – Le quotient de Rayleigh

a) Règle du quotient avec $\nabla(x^{\mathsf{T}}Ax) = 2Ax$ et $\nabla(x^{\mathsf{T}}x) = 2x$:

$$\nabla R(x) = \frac{2Ax \cdot x^{\mathsf{T}}x - x^{\mathsf{T}}Ax \cdot 2x}{(x^{\mathsf{T}}x)^2} = \frac{2}{\|x\|^2}(Ax - R(x)x)$$

b) $\nabla R(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = R(x)x$: x est vecteur propre pour la valeur propre $R(x)$; réciproquement si $Ax = \lambda x$, $R(x) = \lambda$.

c) $R(tx) = R(x)$ pour $t \neq 0$: $R(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = R(S)$ avec S la sphère unité, compacte. Le maximum est atteint en un point critique, donc vaut une valeur propre, nécessairement la plus grande.

Réponse. $\nabla R = \frac{2}{\|x\|^2}(Ax - R(x)x)$; points critiques = vecteurs propres ; $\max R = \lambda_{\max}$.

Correction de l'exercice 9 – Meilleure approximation quadratique

a) En développant, $F(a,b) = \frac{a^2}{3} + ab + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + \frac{1}{5}$, de hessienne $\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant $\frac{1}{3} > 0$ et de trace positive.

b) En dérivant sous l'intégrale (ou sur la forme développée) : $\int_0^1 (x^2 - ax - b)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_0^1 x(x^2 - ax - b)\,\mathrm{d}x = 0$, soit $\frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0$ et $\frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0$, d'où $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$.

c) $\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{30} - \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$, soit

$$F_{\min} = \frac{1}{180}$$

$x - \frac{1}{6}$ est la projection orthogonale de x^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $\int_0^1 PQ$.

Réponse. $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$, $F_{\min} = \frac{1}{180}$: projection de x^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Correction de l'exercice 10 – Inégalité de Young par optimisation

a) $\varphi'(x) = x^{p-1} - y$ s'annule en $x_0 = y^{1/(p-1)}$, et φ est convexe ($p > 1$) : minimum en x_0. Comme $\frac{p}{p-1} = q$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\varphi(x_0) = \frac{y^q}{p} - y^q = -\frac{y^q}{q}$$

b) $\varphi(x) \geq -\frac{y^q}{q}$ s'écrit $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ (évident si $y = 0$).

c) $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, c'est-à-dire $(x-y)^2 \geq 0$.

Réponse. $\min \varphi = -\frac{y^q}{q}$, d'où $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$; pour $p = 2$: $2xy \leq x^2 + y^2$.

Correction de l'exercice 11 – Déterminant maximal sur une sphère de matrices

a) S est compacte, det continue, et $I_n \in S$ avec $\det I_n = 1 > 0$.

b) Lagrange : $\mathrm{com}(M) = 2\lambda M$. Comme $M^{\mathsf{T}}\mathrm{com}(M) = \det(M) I_n$, on obtient $2\lambda M^{\mathsf{T}}M = \det(M) I_n$, et $\lambda \neq 0$ (sinon $\det M = 0$), d'où $M^{\mathsf{T}}M = cI_n$ avec $c = \frac{\det M}{2\lambda}$, et $c > 0$ car $M^{\mathsf{T}}M$ est positive non nulle.

c) $\mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}}M) = nc = n$, donc $c = 1$: M est orthogonale de déterminant positif, $\det M = 1$. Pour $M \neq 0$ quelconque, $M' = \frac{\sqrt{n}}{\|M\|_F} M \in S$ et $|\det M'| \leq 1$ (en changeant au besoin le signe d'une colonne) :

$$|\det M| \leq \left(\frac{\|M\|_F}{\sqrt{n}} \right)^n$$

Réponse. $\max_S \det = 1$, atteint sur $SO_n(\mathbb{R})$; d'où $|\det M| \leq (\|M\|_F^2 / n)^{n/2}$.

Correction de l'exercice 12 – Boîte de coût minimal

a) Hauteur $z = \frac{2}{xy}$; $C = 3 \cdot 2xy + 2(2xz + 2yz) = 6xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.

b) $6y - \frac{8}{x^2} = 0$ et $6x - \frac{8}{y^2} = 0$: $x^2 y = xy^2 = \frac{4}{3}$, d'où $x = y = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \approx 1{,}10$ m et $z = \frac{2}{x^2} \approx 1{,}65$ m.

c) $C \to +\infty$ au bord de l'ouvert et à l'infini (comme pour la boîte sans couvercle) : le minimum est atteint en ce point critique. Avec $x^3 = \frac{4}{3}$:

$$C_{\min} = 6x^2 + \frac{16}{x} = \frac{6x^3 + 16}{x} = \frac{24}{x} \approx 21{,}8 \text{ €}$$

Réponse. Fond carré de côté $(4/3)^{1/3} \approx 1{,}10$ m, hauteur $\approx 1{,}65$ m, coût $\approx 21{,}8$ €.

Correction de l'exercice 13 – Projection sur un convexe fermé

a) Existence par coercivité sur le fermé K. Unicité : si $p \neq p'$ réalisent le minimum m, le milieu (dans K) donne, par l'identité du parallélogramme, $\left\| \frac{p+p'}{2} - a \right\|^2 = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{4}\|p - p'\|^2 < m$, contradiction.

b) $\varphi(t) = f(p + t(x-p))$ pour $t \in [0,1]$ est minimale en 0, donc $\varphi'(0) \geq 0$, soit $2\langle p - a, x - p \rangle \geq 0$.

c) $p = (1, \frac{1}{2})$ (on ramène chaque coordonnée dans $[0,1]$). Alors $a - p = (1, 0)$ et pour $x \in K$:

$$\langle a - p, x - p \rangle = x_1 - 1 \leq 0 \ \checkmark$$

Réponse. Projection unique p caractérisée par $\langle a - p, x - p \rangle \leq 0$; ici $p = (1, \frac{1}{2})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Équilibre d’un ressort sur une droite

a) $y = 1 - x$: $E(x) = \frac{k}{2}\left(x^2 + (1-x)^2\right) + mg(1-x)$.

b) $E'(x) = k(2x-1) - mg = 0$ donne $x = \frac{1}{2} + \frac{mg}{2k}$, minimum car $E'' = 2k > 0$, et $y = \frac{1}{2} - \frac{mg}{2k}$.

c) $\nabla E = (kx, ky + mg) = \lambda(1,1)$: $kx = ky + mg$, donc $x - y = \frac{mg}{k}$, avec $x + y = 1$: même point. Le multiplicateur

$$\lambda = kx = \frac{k}{2} + \frac{mg}{2}$$

mesure l’intensité (au signe près) de la réaction normale de la droite, dirigée selon $(1,1)$: la somme des forces $-\nabla E + \lambda(1,1)$ est nulle à l’équilibre.

Réponse. Équilibre en $\left(\frac{1}{2} + \frac{mg}{2k}, \frac{1}{2} - \frac{mg}{2k}\right)$; $\lambda = \frac{k + mg}{2}$ est la réaction de la droite.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : régression linéaire et projection

a) $S(a,b) = \|Y - aX - b\mathbf{1}\|^2$; comme X et $\mathbf{1}$ sont libres, la matrice $(X\ \mathbf{1})$ est de rang 2, $H_S = 2(X\ \mathbf{1})^{\mathsf{T}}(X\ \mathbf{1})$ est définie positive.

b) $\partial_b S = 0$ donne $\overline{y} = a\overline{x} + b$; $\partial_a S = 0$ donne $\overline{xy} = a\overline{x^2} + b\overline{x}$. En substituant b : $\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = a(\overline{x^2} - \overline{x}^2)$.

c) $\overline{x} = \frac{3}{2}$, $\overline{y} = 4$, $\overline{xy} = \frac{0+3+8+24}{4} = \frac{35}{4}$, $\overline{x^2} = \frac{7}{2}$: cov $= \frac{35}{4} - 6 = \frac{11}{4}$, $V = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$, donc $a = \frac{11}{5} = 2{,}2$ et $b = 4 - 3{,}3 = 0{,}7$. Résidus $0{,}3$; $0{,}1$; $-1{,}1$; $0{,}7$:

$$S_{\min} = 0{,}09 + 0{,}01 + 1{,}21 + 0{,}49 = 1{,}8$$

Réponse. $a = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}$, $b = \overline{y} - a\overline{x}$; ici $y = 2{,}2x + 0{,}7$, $S_{\min} = 1{,}8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).