Plaquette 3 – Extremums globaux : compacité, coercivité et convexité

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un extremum **global** se cherche en deux temps : **existence**, puis **localisation**. L'existence vient de la **compacité** (fonction continue sur un fermé borné), de la **coercivité** ($f \to +\infty$ à l'infini sur un fermé) ou du comportement au bord d'un ouvert. La localisation : un extremum atteint à l'**intérieur** est un point critique ; sur le **bord**, on paramètre ou l'on substitue. On termine en **comparant les valeurs** obtenues. Si f est **convexe** sur un ouvert convexe, tout point critique est un minimum global (unique si f est strictement convexe).

Exercice 1 – Extremums sur un triangle

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x$ sur le triangle $T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$.

a) Justifier l'existence des extremums et trouver les points critiques intérieurs.

b) Étudier f sur chacun des trois côtés.

c) Conclure.

Exercice 2 – Minimum global par coercivité

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

a) Montrer que $f(x,y) \to +\infty$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$.

b) Déterminer les points critiques de f.

c) En déduire le minimum global de f, et la nature de l'origine.

Exercice 3 – Une borne inférieure non atteinte

Soit $f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $f > 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $f\left(\frac{1}{n}, n\right)$ et en déduire $\inf f$.

c) Le minimum est-il atteint ? Quelle hypothèse du théorème de coercivité fait défaut ?

Exercice 4 – Minimum unique d'une fonction strictement convexe

Soit $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x^2 + y^2$.

a) Montrer que f est strictement convexe (calculer la hessienne).

b) Montrer que f admet un unique point critique, de la forme (t,t) avec $\mathrm{e}^{2t} = -2t$.

c) Conclure, et donner une valeur approchée du minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Point le plus proche d'une hyperbole

a) Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x_0 \in F$ tel que $\|x_0 - a\| = d(a, F)$.

b) Déterminer la distance de l'origine à l'hyperbole $H : xy = 1$.

c) Le point le plus proche est-il unique ?

Exercice 6 – Maximum sur le plan entier

Soit $f(x, y) = (x + y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

a) Montrer que $|f(x, y)| \leq \sqrt{2}\, r\, \mathrm{e}^{-r^2}$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) En déduire que f admet un maximum global et le déterminer.

c) Retrouver ce point comme point critique.

Exercice 7 – Maximum à l'intérieur d'un compact

Soit $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ sur $T = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

a) Montrer que f atteint son maximum sur T en un point intérieur.

b) Le déterminer.

c) En déduire que pour $a, b, c \geq 0$ avec $a + b + c = 1$, $abc \leq \frac{1}{27}$.

Exercice 8 – Point minimisant une somme de carrés de distances

Soient $A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathbb{R}^n$ et $f(M) = \sum_{k=1}^{p} \|M - A_k\|^2$.

a) Calculer $\nabla f(M)$.

b) Montrer que f admet un unique minimum global, au point $G = \frac{1}{p}\sum_k A_k$.

c) Montrer que $f(M) = f(G) + p\|M - G\|^2$ (relation de Leibniz).

Exercice 9 – Norme d'opérateur et nombre d'or

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

a) Justifier que $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ est atteint.

b) Montrer que $\|Ax\|^2 = x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A x$ et que ce sup vaut la racine de la plus grande valeur propre de $A^{\mathsf{T}}A$.

c) En déduire $\|A\|_{\mathrm{op}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 10 – Minimum sur un ouvert non borné

Soit $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ sur $U =]0, +\infty[^2$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Montrer que $f(x, y) \geq 3$ sur U (inégalité arithmético-géométrique).

c) Conclure, puis expliquer pourquoi l'on pouvait prévoir l'existence d'un minimum (comportement au bord et à l'infini).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Convexité et minimum global

Soit f convexe et différentiable sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ (dériver $t \mapsto f(x + t(y-x))$ en 0).

b) En déduire que tout point critique est un minimum global.

c) On admet que $g(x,y) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ est convexe. Déterminer les minimums de $f(x,y) = g(x,y) - \dfrac{x+y}{2}$.

Exercice 12 – Démontrer une inégalité par un minimum

a) Montrer que $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer son minimum.

c) En déduire que $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ pour tous réels, avec le cas d'égalité.

Exercice 13 – Extremums sur un disque avec un bord décisif

Soit $f(x,y) = x^2 y$ sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 3\}$.

a) Déterminer les points critiques intérieurs et la valeur de f en ces points.

b) Étudier f sur le cercle de rayon $\sqrt{3}$.

c) Conclure.

Exercice 14 – Boîte sans couvercle de surface minimale

On veut fabriquer une boîte parallélépipédique sans couvercle, de volume 32 cm³, en utilisant le moins de carton possible.

a) Avec x, y les dimensions du fond et z la hauteur, exprimer la surface S en fonction de x et y seulement.

b) Déterminer le point critique de S sur $]0, +\infty[^2$.

c) Justifier que c'est un minimum global et donner les dimensions.

Exercice 15 – Synthèse : minimisation d'une fonction quadratique

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A x - b^{\mathsf{T}} x$.

a) Calculer ∇f et H_f.

b) Si A est définie positive, montrer que f admet un unique minimum en $x^* = A^{-1} b$, de valeur $-\frac{1}{2} b^{\mathsf{T}} A^{-1} b$. Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (1,1)$.

c) Si A admet une valeur propre strictement négative, montrer que f n'est pas minorée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).