# Plaquette 1 – Extremums libres, sous contrainte et multiplicateurs de Lagrange

## Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

**Méthode**

On cherche les **points critiques**, on tranche par la **hessienne** ou la **convexité**, on invoque la **compacité** pour garantir l'existence, et on traite les contraintes par **substitution**, **paramétrage** ou **multiplicateurs de Lagrange**.

### Exercice 1 – Extremum libre

Déterminer les extremums de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$.

### Exercice 2 – Point col

Étudier les extremums de $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$.

### Exercice 3 – Cas dégénéré

Étudier $(0, 0)$ pour $f(x, y) = x^4 + y^4$ et pour $g(x, y) = x^4 - y^4$.

### Exercice 4 – Existence par compacité

Montrer que $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ admet un maximum sur le disque fermé $D$ de rayon 1, et le déterminer.

### Exercice 5 – Contrainte par substitution

Minimiser $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 5$.

### Exercice 6 – Multiplicateurs de Lagrange

Déterminer les extremums de $f(x, y) = xy$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

### Exercice 7 – Optimisation convexe

Soit $f(x, y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y - x - y$. Montrer que $f$ admet un minimum global et le calculer.

### Exercice 8 – Inégalité par optimisation

Démontrer que pour $x, y > 0$ : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$.

### Exercice 9 – Optimisation géométrique

Parmi les rectangles de périmètre 20, déterminer celui d'aire maximale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 10 – Deux contraintes

Minimiser $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $x + y + z = 3$ et $x - y = 1$.

### Exercice 11 – Moindres carrés

Déterminer $(a,b)$ minimisant $S(a,b) = \sum_{i=1}^{3} (ax_i + b - y_i)^2$ pour les points $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$.

### Exercice 12 – Extremums sur le disque fermé

Soit $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ sur le disque fermé $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Justifier que $f$ admet un maximum et un minimum sur $D$.

b) Déterminer les points critiques de $f$ à l'intérieur de $D$.

c) Étudier $f$ sur le cercle unité et conclure.

### Exercice 13 – Hessienne en dimension trois

Soit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - x$ sur $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer l'unique point critique de $f$.

b) Calculer la hessienne et montrer qu'elle est définie positive (on pourra chercher ses valeurs propres).

c) En déduire que $f$ admet un minimum global, et le calculer.

### Exercice 14 – Forme quadratique sur le cercle

Soit $q(x,y) = x^2 + xy + y^2$ et le cercle $C : x^2 + y^2 = 1$.

a) Écrire les conditions de Lagrange pour les extremums de $q$ sur $C$.

b) Montrer qu'elles signifient que $(x,y)$ est vecteur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, et en déduire les extremums.

c) Interpréter avec le théorème spectral.

### Exercice 15 – Synthèse : boîte de volume maximal

Parmi les parallélépipèdes rectangles inscrits dans la sphère de rayon $R$, déterminer celui de volume maximal.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).