Plaquette 4 – Extremums sous contrainte : vecteurs tangents et multiplicateurs de Lagrange

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour optimiser f sur $X = \{g = 0\}$: (1) on établit l'**existence** (le plus souvent X compact) ; (2) on vérifie que ∇g **ne s'annule pas** sur X (sinon les points où $\nabla g = 0$ sont des candidats à part) ; (3) on résout le système de **Lagrange** $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$; (4) on **compare les valeurs** de f aux candidats. Géométriquement, en un extremum, $\nabla f(a)$ est **orthogonal à l'espace tangent** $T_a X = \nabla g(a)^{\perp}$: la ligne de niveau de f est tangente à la contrainte. Pour les systèmes symétriques, on multiplie les équations par les variables pour faire apparaître une quantité commune.

Exercice 1 – Un produit maximal sous contrainte de somme

On cherche le maximum de $f(x, y, z) = xy^2z^3$ sur $X = \{x + y + z = 6,\ x, y, z \geq 0\}$.

a) Justifier l'existence du maximum et montrer qu'il est atteint en un point où $x, y, z > 0$.

b) Écrire les conditions de Lagrange et les résoudre.

c) Donner le maximum.

Exercice 2 – Forme quadratique sur la sphère

Soit $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy$ sur la sphère unité S.

a) Écrire $q(X) = X^{\mathsf{T}} A X$ et montrer que les conditions de Lagrange s'écrivent $AX = \lambda X$.

b) Déterminer les valeurs propres de A.

c) En déduire le maximum et le minimum de q sur S, et les points où ils sont atteints.

Exercice 3 – Distance d'un point à un plan

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n, x \rangle = c\}$ avec $n \neq 0$, et $a \in \mathbb{R}^n$.

a) Écrire les conditions de Lagrange pour minimiser $\|x - a\|^2$ sur P.

b) En déduire $d(a, P) = \dfrac{|\langle n, a \rangle - c|}{\|n\|}$.

c) Calculer la distance de $(1, 2, 3)$ au plan $x + 2y + 2z = 1$.

Exercice 4 – Point d'une ellipse le plus proche

Soit l'ellipse $E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ et $A = (1, 0)$.

a) Écrire les conditions de Lagrange pour les extremums de $d^2 = (x - 1)^2 + y^2$ sur E.

b) Résoudre le système.

c) En déduire la distance minimale et la distance maximale de A à E.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Inégalité arithmético-géométrique

a) Montrer que $f(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$ admet un maximum sur $X = \{x \in [0, +\infty[^n : x_1 + \cdots + x_n = n\}$, atteint en un point à coordonnées strictement positives.

b) Par les multiplicateurs de Lagrange, montrer que ce maximum vaut 1.

c) En déduire que pour $a_1, \ldots, a_n > 0$: $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

Exercice 6 – Espace tangent à la sphère

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ euclidien.

a) Montrer que tout vecteur tangent à S en a est orthogonal à a (dériver $\|\gamma(t)\|^2 = 1$).

b) Réciproquement, pour $v \perp a$, construire une courbe tracée sur S de vitesse v en a.

c) En déduire que si f différentiable admet un extremum sur S en a, alors $\nabla f(a)$ est colinéaire à a. Application : $f(x) = \langle u, x \rangle$.

Exercice 7 – Rectangle inscrit dans une ellipse

On inscrit dans l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ un rectangle de côtés parallèles aux axes, de sommet (x, y) avec $x, y > 0$.

a) Exprimer l'aire A et écrire les conditions de Lagrange.

b) Déterminer le rectangle d'aire maximale.

c) Comparer avec l'aire de l'ellipse (πab).

Exercice 8 – Cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère

Un cylindre de rayon r et de hauteur h est inscrit dans une sphère de rayon R.

a) Écrire la contrainte liant r et h.

b) Maximiser le volume $V = \pi r^2 h$ par la méthode de Lagrange.

c) Quelle fraction du volume de la boule le cylindre occupe-t-il ?

Exercice 9 – Fonction de production sous contrainte de budget

Une entreprise produit $P(x, y) = x^{1/3} y^{2/3}$ avec x unités de travail (coût 2) et y unités de capital (coût 1), sous le budget $2x + y = 12$.

a) Écrire les conditions de Lagrange.

b) Déterminer la répartition optimale.

c) Quelle part du budget est consacrée au travail ? Commenter.

Exercice 10 – Entropie maximale

Sur $\Delta = \{p \in [0, 1]^n : p_1 + \cdots + p_n = 1\}$, on pose $H(p) = -\sum_i p_i \ln p_i$ (avec $0 \ln 0 = 0$).

a) Justifier que H est continue sur Δ et admet un maximum.

b) Aux points de Δ à coordonnées strictement positives, écrire les conditions de Lagrange et montrer qu'elles imposent $p_i = \dfrac{1}{n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer par récurrence sur n que le maximum vaut $\ln n$ (comparer avec les points du bord).

Exercice 11 – Quand le gradient de la contrainte s'annule

Soit $X = \{(x,y) : y^2 = x^3\}$ et $f(x,y) = x$.

a) Montrer que f atteint son minimum sur X en $(0,0)$.

b) Montrer qu'il n'existe aucun λ tel que $\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0)$, avec $g(x,y) = y^2 - x^3$.

c) Quelle hypothèse du théorème est en défaut ? Décrire l'allure de X en 0.

Exercice 12 – Le point le plus chaud d'une sphère

La température en un point de la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$ est $T(x,y,z) = 400xyz^2$.

a) Écrire les conditions de Lagrange.

b) En multipliant les équations par x, y, z, montrer qu'aux points où $T \neq 0$ on a $x^2 = y^2$ et $z^2 = 2x^2$.

c) Déterminer la température maximale et minimale.

Exercice 13 – Extremums de la distance sur une ellipse inclinée

Soit $E : x^2 + xy + y^2 = 3$.

a) Écrire les conditions de Lagrange pour les extremums de $f = x^2 + y^2$ sur E.

b) Résoudre et déterminer le maximum et le minimum de f.

c) Interpréter géométriquement (demi-axes de l'ellipse).

Exercice 14 – Cauchy-Schwarz par les multiplicateurs

Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$ et $f(x) = \sum_i a_i x_i^2$ avec tous les $a_i > 0$.

a) Déterminer, par la méthode de Lagrange, le minimum de f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

b) Justifier que c'est bien un minimum global (convexité ou coercivité).

c) Application : $n = 3$, $a = (1,2,3)$.

Exercice 15 – Synthèse : la loi de la réfraction

Un rayon lumineux va de $A = (0,a)$ (milieu où la vitesse est v_1) à $B = (d,-b)$ (vitesse v_2), avec $a, b, d > 0$, en traversant l'axe $y = 0$ au point $(x,0)$. Selon le principe de Fermat, il minimise la durée $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}$.

a) Montrer que T est strictement convexe et coercive sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire l'existence et l'unicité d'un minimum, situé dans $]0,d[$.

c) Montrer qu'au minimum $\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$, où i_1, i_2 sont les angles des deux segments avec la verticale (loi de Snell-Descartes).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).