Plaquette 2 – Points critiques, hessienne et nature des extremums locaux

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Sur un **ouvert**, un extremum local d'une fonction différentiable est un **point critique**. Pour trancher, on écrit la **formule de Taylor-Young à l'ordre 2** : $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} H_f(a) h + o(\|h\|^2)$. Si la hessienne est **définie positive** (resp. négative), c'est un minimum (resp. maximum) local strict ; si elle a des valeurs propres **des deux signes**, c'est un **point col**. Si elle est **dégénérée**, le test ne conclut pas : on étudie f directement (restrictions à des droites ou des courbes bien choisies, signe d'une expression factorisée).

Exercice 1 – Un minimum local qui n'est pas global

Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Déterminer leur nature.

c) Le minimum local trouvé est-il un minimum global ?

Exercice 2 – Points critiques avec un cas dégénéré

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

a) Montrer que les points critiques sont $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

b) Étudier leur nature (pour l'origine, comparer $f(x,x)$ et $f(x,0)$).

c) Montrer que f admet un minimum global et le donner.

Exercice 3 – Nature par un développement limité

Soit $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - xy$.

a) Écrire le développement limité de f à l'ordre 2 en $(0,0)$.

b) En déduire la nature de l'origine.

c) Est-ce un minimum global ?

Exercice 4 – Trois fonctions de même hessienne

On considère $f_1 = x^2 + y^4$, $f_2 = x^2 - y^4$ et $f_3 = x^2 + y^3$.

a) Vérifier que l'origine est un point critique de chacune, de même hessienne.

b) Déterminer la nature de l'origine pour chacune.

c) Quelle leçon en tirer ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – La selle de singe

Soit $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

a) Montrer que l'origine est le seul point critique et que la hessienne y est nulle.

b) En coordonnées polaires, montrer que $f = r^3 \cos(3\theta)$.

c) En déduire que l'origine n'est pas un extremum, et décrire le signe de f autour de 0.

Exercice 6 – Condition nécessaire d'ordre deux

Soit f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$ un minimum local.

a) En étudiant $\varphi(t) = f(a + th)$, montrer que $h^{\mathsf{T}} H_f(a) h \geq 0$ pour tout h.

b) Montrer par un exemple que cette condition n'est pas suffisante.

c) La fonction $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + x^3$ admet-elle un extremum en 0 ?

Exercice 7 – Minimum sur toute droite mais pas minimum local

Soit $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

a) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine admet un minimum local strict en 0.

b) Montrer que l'origine n'est pas un minimum local de f.

c) Calculer la hessienne de f en 0 et commenter.

Exercice 8 – Un cercle de minimums

Soit $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$.

a) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.

b) Étudier la nature de l'origine.

c) Calculer la hessienne en un point du cercle unité et expliquer pourquoi elle est dégénérée.

Exercice 9 – Cinq points critiques en dimension trois

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Étudier la nature de l'origine.

c) Étudier la nature de $(1, 1, 1)$, et en déduire celle des autres points critiques par symétrie.

Exercice 10 – Nature selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a(x, y) = x^2 + 2axy + y^2 + x^4$.

a) Vérifier que l'origine est critique et calculer la hessienne.

b) Discuter la nature de l'origine pour $|a| \neq 1$.

c) Traiter les cas $a = \pm 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Le triangle aux sinus maximaux

Soit $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ sur $U =]0, \pi[^2$.

a) Déterminer les points critiques de f dans U.

b) Déterminer leur nature.

c) Interpréter en termes d'angles d'un triangle.

Exercice 12 – Un point critique non dégénéré est isolé

Soit f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et a un point critique avec $H_f(a)$ inversible.

a) Montrer que $\nabla f(a + h) = H_f(a)h + o(\|h\|)$.

b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que a soit le seul point critique dans la boule $B(a, r)$.

c) Le résultat subsiste-t-il si $H_f(a)$ n'est pas inversible ? (penser à l'exercice « Un cercle de minimums »)

Exercice 13 – Fonction symétrique de trois variables

Soit $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

a) Montrer que l'origine est le seul point critique.

b) Calculer les valeurs propres de la hessienne.

c) Conclure et exhiber explicitement des directions où f croît et où elle décroît.

Exercice 14 – Extremums d'une gaussienne modulée

Soit $f(x, y) = x\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)/2}$.

a) Déterminer les points critiques de f.

b) Déterminer leur nature à l'aide de la hessienne.

c) Montrer que ce sont des extremums globaux.

Exercice 15 – Synthèse : la fonction de Rosenbrock

Soit $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$.

a) Déterminer les points critiques de f et leur nature.

b) Montrer que le minimum est global.

c) Calculer les valeurs propres de la hessienne au minimum (valeurs approchées) et expliquer pourquoi une méthode de descente de gradient y converge lentement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).