Plaquette 5 – Synthèse : problèmes d'optimisation en géométrie, analyse et algèbre linéaire

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un problème d'optimisation se traite en quatre étapes : **modéliser** (variables, fonction objectif, contraintes, domaine) ; **prouver l'existence** (compacité, coercivité, convexité) ; **localiser** les candidats (points critiques intérieurs, Lagrange sur les contraintes, points singuliers et bords) ; **conclure** en comparant les valeurs et en interprétant. Les problèmes quadratiques ($\|Ax-b\|^2$, $x^{\mathsf{T}}Ax$) se ramènent à l'algèbre linéaire : **équations normales**, **projection orthogonale**, **valeurs propres**.

Exercice 1 – Le point de Fermat d'un triangle

Soient A, B, C trois points non alignés du plan et $f(M) = MA + MB + MC$.

a) Montrer que f est convexe, coercive, et admet un minimum global.

b) En un point M distinct de A, B, C, calculer $\nabla f(M)$ et montrer que M est critique si et seulement si les angles $A\hat{M}B$, $B\hat{M}C$, $C\hat{M}A$ valent tous $\frac{2\pi}{3}$.

c) Pour le triangle équilatéral de côté 2, déterminer le point de Fermat et la valeur minimale.

Exercice 2 – Équations normales des moindres carrés

Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$ et $F(x) = \|Ax-b\|^2$.

a) Calculer $\nabla F(x)$ et montrer que F est convexe.

b) En déduire que x minimise F si et seulement si $A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}b$, et que la solution est unique si $\operatorname{rg} A = n$.

c) Application : ajuster $y = ax^2$ aux points $(1,1)$, $(2,5)$, $(3,8)$.

Exercice 3 – Triangle d'aire maximale à périmètre fixé

Un triangle a pour côtés a, b, c et pour demi-périmètre p fixé. On admet la formule de Héron : $A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

a) Poser $u = p-a$, $v = p-b$, $w = p-c$ et traduire le problème (contrainte, domaine).

b) Maximiser uvw sous la contrainte obtenue.

c) En déduire le triangle d'aire maximale et cette aire.

Exercice 4 – Convergence de la descente de gradient

Soit A symétrique définie positive de valeurs propres $0 < \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$, $f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}Ax$ et $x_{k+1} = x_k - \tau \nabla f(x_k)$ avec $\tau > 0$.

a) Montrer que $x_k = (I_n - \tau A)^k x_0$.

b) Montrer que $x_k \to 0$ pour tout x_0 si et seulement si $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que le meilleur facteur de convergence $\rho(\tau) = \max_i |1 - \tau\lambda_i|$ vaut $\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$ avec $\kappa = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$, et l'évaluer pour $\kappa = 2500$.

Exercice 5 – Polygone inscrit de périmètre maximal

Un polygone convexe à n côtés est inscrit dans le cercle unité ; ses côtés interceptent des arcs d'angles $\theta_1, \dots, \theta_n > 0$ avec $\sum \theta_i = 2\pi$.

a) Montrer que le périmètre vaut $P = 2\sum_i \sin\frac{\theta_i}{2}$.

b) Par la méthode de Lagrange, montrer qu'en un point critique tous les θ_i sont égaux.

c) Justifier que c'est le maximum (concavité) et donner le périmètre maximal. Que vaut sa limite quand $n \to +\infty$?

Exercice 6 – Distance entre deux droites de l'espace

Soient $D_1 = \{(s, 0, 0)\}$ et $D_2 = \{(0, 1 + t, t)\}$.

a) Exprimer le carré de la distance $f(s, t)$ entre les points de paramètres s et t.

b) Minimiser f et en déduire $d(D_1, D_2)$.

c) Vérifier que la droite joignant les points obtenus est perpendiculaire à D_1 et à D_2, et retrouver la distance par la formule $\frac{|\langle \overrightarrow{AB}, u \wedge v \rangle|}{\|u \wedge v\|}$.

Exercice 7 – Profit maximal pour deux produits

Une entreprise vend deux produits aux prix unitaires 10 et 8 ; produire les quantités x et y coûte $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

a) Écrire le profit $\Pi(x, y)$ et montrer qu'il est strictement concave.

b) Déterminer la production optimale.

c) Calculer le profit maximal et vérifier qu'au point optimal le coût marginal de chaque produit égale son prix.

Exercice 8 – Le quotient de Rayleigh

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $R(x) = \frac{x^{\mathsf{T}} A x}{x^{\mathsf{T}} x}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) Calculer $\nabla R(x)$.

b) Montrer que les points critiques de R sont exactement les vecteurs propres de A, et que R y vaut la valeur propre associée.

c) Montrer que R est homogène de degré 0, et en déduire que $\max R = \lambda_{\max}$ est atteint.

Exercice 9 – Meilleure approximation quadratique

On cherche les réels a, b minimisant $F(a, b) = \int_0^1 \left(x^2 - ax - b\right)^2 \mathrm{d}x$.

a) Montrer que F est une fonction polynomiale de degré 2 en (a, b), strictement convexe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Écrire $\nabla F = 0$ et résoudre.
c) Calculer le minimum et interpréter comme une projection orthogonale.

Exercice 10 – Inégalité de Young par optimisation

Soient $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $y > 0$ fixé.

a) Étudier $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} - xy$ sur $[0, +\infty[$ et montrer que son minimum vaut $-\frac{y^q}{q}$.

b) En déduire l'inégalité de Young : $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ pour $x, y \ge 0$.

c) Cas $p = q = 2$: quelle inégalité retrouve-t-on ?

Exercice 11 – Déterminant maximal sur une sphère de matrices

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme de Frobenius et l'on cherche le maximum de $\det$ sur $S = \{M : \|M\|_F^2 = n\}$.

a) Justifier l'existence du maximum et montrer qu'il est strictement positif.

b) Avec $\nabla \det(M) = \mathrm{com}(M)$, montrer qu'en un maximum $M^{\mathsf{T}}M = cI_n$ pour un réel $c > 0$.

c) En déduire que le maximum vaut 1, atteint exactement sur $SO_n(\mathbb{R})$, puis que $|\det M| \le \left(\frac{\|M\|_F^2}{n}\right)^{n/2}$ pour toute M.

Exercice 12 – Boîte de coût minimal

Une boîte fermée parallélépipédique de volume $V = 2$ m³ a un fond et un couvercle coûtant 3 €/m², et des faces latérales coûtant 2 €/m².

a) Exprimer le coût $C(x, y)$ en fonction des dimensions x, y du fond.

b) Déterminer le point critique de C sur $]0, +\infty[^2$.

c) Justifier que c'est un minimum global et donner les dimensions et le coût.

Exercice 13 – Projection sur un convexe fermé

Soit K un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ euclidien et $a \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $f(x) = \|x - a\|^2$ admet un unique minimum p sur K (coercivité et stricte convexité).

b) Montrer que $\langle a - p, x - p\rangle \le 0$ pour tout $x \in K$ (dériver $t \mapsto f(p + t(x - p))$ en 0^+).

c) Application : $K = [0, 1]^2$, $a = (2, \frac{1}{2})$; déterminer p et vérifier b).

Exercice 14 – Équilibre d'un ressort sur une droite

Un ressort relie l'origine à un point $M = (x, y)$, d'énergie $\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$; le point est soumis à la pesanteur, d'énergie mgy, et doit rester sur la droite $x + y = 1$.

a) Écrire l'énergie totale E restreinte à la droite comme fonction de x seulement.

b) Déterminer la position d'équilibre (minimum de l'énergie).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Retrouver le résultat par les multiplicateurs de Lagrange et interpréter λ (force de réaction de la droite).

Exercice 15 – Synthèse : régression linéaire et projection

On dispose de $n \geq 2$ points (x_i, y_i) avec les x_i non tous égaux, et l'on minimise $S(a,b) = \sum_i (y_i - a x_i - b)^2$.

a) Montrer que S est strictement convexe et coercive.

b) Établir $a = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

c) Application aux points $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,8)$; calculer aussi la somme des carrés des résidus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).