Plaquette 3 – Polynômes et algèbre linéaire : bases et endomorphismes

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Bases de $\mathrm{K}_n[X]$.

— **Taylor** en a : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

— **Lagrange** aux points distincts $x_0, \dots, x_n$: $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ et $P = \sum P(x_i)L_i$; les formes $P \mapsto P(x_i)$ forment la base duale.

— **Binomiale** : $\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

Endomorphismes.

— Une matrice triangulaire a ses valeurs propres sur la diagonale ; si elles sont **distinctes**, l'endomorphisme est diagonalisable.

— Différence finie $\Delta P = P(X+1) - P(X)$: $\deg \Delta P = \deg P - 1$ et

$$\Delta\binom{X}{k} = \binom{X}{k-1}$$

— **Vandermonde** : $\det (x_i^j)_{0 \le i,j \le n} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

Correction de l'exercice 1 – L'endomorphisme de translation

a) $\tau(1) = 1$, $\tau(X) = 1 + X$, $\tau(X^2) = 1 + 2X + X^2$, d'où

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) τ^{-1} : $P \mapsto P(X-1)$, donc (mêmes calculs avec -1) :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Seule valeur propre 1 ; si τ était diagonalisable, ce serait l'identité. Non. $\tau - \mathrm{id} = \Delta$ baisse le degré de 1, donc $\Delta^3 = 0$ et $\Delta^2(X^2) = \Delta(2X+1) = 2 \neq 0$: $\pi_\tau = (X-1)^3$.

Réponse. T triangulaire de coefficients binomiaux ; T^{-1} idem avec signes alternés ; $\pi_\tau = (X-1)^3$.

Correction de l'exercice 2 – Formule de Taylor et base des $(X-a)^k$

a) Famille de $n+1$ polynômes de degrés $0, 1, \dots, n$, échelonnée en degré, donc libre, et de cardinal $\dim \mathrm{K}_n[X]$: c'est une base.

b) Si $P = \sum c_k (X-a)^k$, on dérive j fois : $P^{(j)} = \sum_{k \ge j} c_k \frac{k!}{(k-j)!}(X-a)^{k-j}$, et en a seul le terme $k = j$ survit : $P^{(j)}(a) = j!\, c_j$.

c) $P(1) = 0$, $P' = 3X^2 - 2$ donne $P'(1) = 1$, $P'' = 6X$ donne $\frac{P''(1)}{2} = 3$, $\frac{P'''(1)}{6} = 1$. Donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$$

— Vérification : en développant,
$(X-1) + 3(X^2 - 2X + 1) + (X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = X^3 - 2X + 1$ ✓.

Réponse. Coordonnées $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$; $X^3 - 2X + 1 = (X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3$.

Correction de l'exercice 3 – Base de Lagrange et base duale

a) Φ est linéaire ; si $\Phi(P) = 0$, P de degré $\leq n$ a $n+1$ racines, donc $P = 0$. Φ injective entre espaces de même dimension $n+1$: isomorphisme.

b) Les L_i vérifient $\varphi_j(L_i) = \delta_{ij}$. Comme (L_i) est une base (image réciproque de la base canonique par Φ), (φ_i) est sa base duale :

$$\varphi_j(L_i) = L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

c) Deux formes linéaires égales sur une base sont égales : $\sum_i \psi(L_i)\varphi_i$ prend en L_j la valeur $\psi(L_j)$.

Réponse. Φ isomorphisme ; (φ_i) base duale de (L_i) ; $\psi = \sum \psi(L_i)\varphi_i$.

Correction de l'exercice 4 – Méthode de Simpson

a) $P \mapsto \int_0^1 P$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, donc une combinaison unique des formes d'évaluation en 0, $\frac{1}{2}$, 1 (base du dual).

b) Système : $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\frac{\beta}{2} + \gamma = \frac{1}{2}$, $\frac{\beta}{4} + \gamma = \frac{1}{3}$. Par différence, $\frac{\beta}{4} = \frac{1}{6}$, d'où $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{1}{6}$, $\alpha = \frac{1}{6}$:

$$\int_0^1 P = \frac{P(0) + 4P\left(\frac{1}{2}\right) + P(1)}{6}$$

c) Pour X^3 : $\frac{0 + 4 \times \frac{1}{8} + 1}{6} = \frac{1}{4} = \int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t$ ✓ (symétrie autour de $\frac{1}{2}$). Pour X^4 : $\frac{0 + \frac{1}{4} + 1}{6} = \frac{5}{24} \neq \frac{1}{5}$. La méthode est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Réponse. $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{2}{3}$; exacte jusqu'au degré 3.

Correction de l'exercice 5 – Interpolation de Hermite

a) Si $\Psi(P) = 0$, alors 0 et 1 sont racines doubles : $X^2(X-1)^2 \mid P$, de degré $4 > 3$, donc $P = 0$. Injective, dimensions égales (4) : isomorphisme.

b) 1 racine double : $P = (X-1)^2(aX + b)$. $P(0) = b = 1$. $P' = 2(X-1)(aX+b) + a(X-1)^2$, $P'(0) = -2b + a = 0$, donc $a = 2$:

$$P = (X-1)^2(2X+1) = 2X^3 - 3X^2 + 1$$

c) P descend de 1 à 0 sur $[0,1]$ avec des tangentes horizontales aux extrémités ; $1 - P = 3X^2 - 2X^3$ est la courbe « smoothstep » utilisée en infographie pour raccorder deux paliers sans angle.

Réponse. $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Différence finie et somme des carrés

a) $(X+1)^d - X^d = dX^{d-1} + \dots$: le terme dominant de degré d disparaît, celui de degré $d-1$ a pour coefficient $d\,a_d \neq 0$. Donc $\Delta P = 0$ impose $\deg P \leq 0$.

b) $\Delta : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ a un noyau de dimension 1 ; par le théorème du rang, son image est de dimension $n+1$: surjective.

c) On cherche $Q = aX^3 + bX^2 + cX$. $\Delta Q = a(3X^2+3X+1) + b(2X+1) + c = X^2$: $a = \frac{1}{3}$, $3a + 2b = 0$ donc $b = -\frac{1}{2}$, $a + b + c = 0$ donc $c = \frac{1}{6}$. Ainsi $Q = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$. Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(Q(k+1) - Q(k)\right) = Q(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Réponse. $Q = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$; $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction de l'exercice 7 – Polynômes à valeurs entières

a) H_k est de degré k : famille échelonnée, donc base. Pour $m \geq k$, $H_k(m) = \binom{m}{k} \in \mathbb{N}$; pour $0 \leq m < k$, $H_k(m) = 0$; pour $m < 0$, $H_k(m) = (-1)^k \binom{k-m-1}{k} \in \mathbb{Z}$.

b) On cherche $X^3 = aH_3 + bH_2 + cH_1$: en 1, $c = 1$; en 2, $b + 2c = 8$, $b = 6$; en 3, $a + 3b + 3c = 27$, $a = 6$. Ainsi

$$X^3 = 6\binom{X}{3} + 6\binom{X}{2} + \binom{X}{1}$$

c) Si les c_k sont entiers, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ par a). Réciproquement, $\Delta H_k = H_{k-1}$, donc $\Delta^j P = \sum c_k H_{k-j}$ et $(\Delta^j P)(0) = c_j$. Or $\Delta^j P(0) = \sum_i (-1)^{j-i}\binom{j}{i} P(i)$ est entier : tous les c_j sont entiers. Exemple : $\frac{X(X+1)}{2} = H_2 + H_1$ prend des valeurs entières sans être à coefficients entiers.

Réponse. $X^3 = 6H_3 + 6H_2 + H_1$; $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ coordonnées entières dans la base (H_k).

Correction de l'exercice 8 – L'endomorphisme P ↦ XP'

a) $u(X^k) = kX^k$: la base canonique est formée de vecteurs propres, de valeurs propres $0, 1, \dots, n$. La matrice est $\mathrm{diag}(0, 1, \dots, n)$.

b) $\ker u = \mathrm{Vect}(1)$ (constantes), $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$ (polynômes nuls en 0).

c) $(u - 2\,\mathrm{id})(X^k) = (k-2)X^k$. On écrit $P = \sum a_k X^k$: l'équation devient $\sum (k-2)a_k X^k = 1 + X^3$, d'où $-2a_0 = 1$, $a_3 = 1$, a_2 libre, les autres nuls :

$$P = -\frac{1}{2} + X^3 + \lambda X^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

— Vérification : $X(3X^2 + 2\lambda X) - 2(X^3 + \lambda X^2 - \frac{1}{2}) = X^3 + 1$ ✓.

Réponse. Valeurs propres $0, \dots, n$; $P = X^3 + \lambda X^2 - \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – L'opérateur de Legendre

a) $L(X^k) = k(k-1)X^k - k(k-1)X^{k-2} + 2kX^k = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$: $L(X^k) \in \mathbb{R}_k[X]$, matrice triangulaire supérieure de diagonale $k(k+1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Les valeurs propres sont les $k(k+1)$, $k = 0, \dots, n$, **deux à deux distinctes** ($k \mapsto k(k+1)$ strictement croissante). $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$: diagonalisable.

c) Pour $k = 2$: $P = X^2 + c$, $L(P) = 6X^2 - 2$, et l'on veut $L(P) = 6P$:

$$6X^2 - 2 = 6X^2 + 6c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$

— Vecteur propre $X^2 - \frac{1}{3}$ (proportionnel au polynôme de Legendre $P_2 = \frac{3X^2-1}{2}$).

Réponse. Valeurs propres $k(k+1)$ distinctes ; vecteur propre $X^2 - \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 10 – Orthogonalisation de 1, X, X²

a) Bilinéaire, symétrique, positive ; si $\int_{-1}^{1} P^2 = 0$, la fonction continue positive P^2 est nulle sur $[-1,1]$, donc P a une infinité de racines : $P = 0$.

b) $Q_0 = 1$. $\langle X, 1\rangle = 0$ (imparité), donc $Q_1 = X$. $\langle X^2, 1\rangle = \frac{2}{3}$, $\langle 1, 1\rangle = 2$, $\langle X^2, X\rangle = 0$, d'où

$$Q_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = X^2 - \frac{1}{3}$$

c) La projection de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(Q_0, Q_1)$ est $\frac{1}{3}$, et la distance est $\|Q_2\|$: $\int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) \mathrm{d}t = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$. Distance $\sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{10}}{15}$.

Réponse. $(1, X, X^2 - \frac{1}{3})$; distance $\sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{10}}{15}$.

Correction de l'exercice 11 – Le reste comme projecteur

a) Si $P = BQ + R$ et $P' = BQ' + R'$, alors $\lambda P + P' = B(\lambda Q + Q') + (\lambda R + R')$ avec $\deg(\lambda R + R') < d$: par unicité, ρ est linéaire. Et $\rho(R) = R$ car $\deg R < d$: $\rho \circ \rho = \rho$, c'est un projecteur.

b) $\ker\rho = \{BQ \mid \deg Q \le n - d\}$, de dimension $n - d + 1$; $\mathrm{Im}\rho = \mathrm{K}_{d-1}[X]$, de dimension d. On vérifie le théorème du rang :

$$(n - d + 1) + d = n + 1$$

c) Modulo $X^2 - 1$, $X^2 \equiv 1$: $X^{2m} \equiv 1$ et $X^{2m+1} \equiv X$. Donc $\rho(X^k) = 1$ si k est pair, X si k est impair.

Réponse. ρ projecteur sur $\mathrm{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à $B\,\mathrm{K}_{n-d}[X]$; $\rho(X^k) = 1$ ou X.

Correction de l'exercice 12 – Déterminant de Vandermonde

a) Développement selon la dernière ligne $(1, X, \dots, X^n)$: combinaison linéaire des X^j, le cofacteur de X^n étant $V(x_0, \dots, x_{n-1})$.

b) Pour $X = x_i$ ($i < n$), deux lignes sont égales : $P(x_i) = 0$. Si $V(x_0, \dots, x_{n-1}) \neq 0$, P est de degré n avec ces n racines distinctes, donc

$$P = V(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (X - x_i)$$

— (si $V(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$, l'égalité reste vraie car P, de degré $< n$ avec n racines, est nul). On évalue en x_n.

c) Par récurrence, $V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$. $V(1,2,3) = (2-1)(3-1)(3-2) = 2$.

Réponse. $V = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$; $V(1,2,3) = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Commutant de la dérivation

a) $D^k(e) = \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$, de degré $n-k$: famille échelonnée de $n+1$ éléments, base de E.

b) $Q(D)$ commute avec D, et $Q(D)(e) = v(e)$. Alors pour tout k :

$$v(D^k e) = D^k v(e) = D^k Q(D) e = Q(D) D^k e$$

— v et $Q(D)$ coïncident sur une base : $v = Q(D)$.

c) Le commutant est $\mathrm{K}[D] = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, D, \ldots, D^n)$, de dimension $n+1$ (cette famille est libre puisque $\pi_D = X^{n+1}$). Par la formule de Taylor, $P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$, donc $\tau = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}$ (une « exponentielle » de D).

Réponse. Commutant = $\mathrm{K}[D]$, dimension $n+1$; $\tau = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!}$.

Correction de l'exercice 14 – Polynômes ayant une racine double imposée

a) F est l'intersection des noyaux de deux formes linéaires : c'est un sous-espace.
$P(1) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ racine d'ordre $\geq 2 \Leftrightarrow (X-1)^2 \mid P$, et le quotient est de degré $\leq n-2$.

b) $Q \mapsto (X-1)^2 Q$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ sur F (linéaire, injective, surjective par a)). Donc $\dim F = n-1$, de base $((X-1)^2 X^k)_{0 \leq k \leq n-2}$.

c) Les formes $\varphi_1 : P \mapsto P(1)$ et $\varphi_2 : P \mapsto P'(1)$ sont libres ($\varphi_1(1) = 1$, $\varphi_2(1) = 0$, $\varphi_1(X-1) = 0$, $\varphi_2(X-1) = 1$). L'intersection de leurs noyaux est de codimension 2 :

$$\dim F = (n+1) - 2 = n-1$$

Réponse. $F = (X-1)^2 \mathbb{R}_{n-2}[X]$, de dimension $n-1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : multiplication par X modulo B

a) $u(1) = X$, $u(X) = X^2$, $u(X^2) = X^3 \bmod B = 2X^2 + X - 2$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \chi_C = X^3 - 2X^2 - X + 2 = B$$

— (C est la **matrice compagnon** de B.)

b) $B = X^2(X-2) - (X-2) = (X-1)(X+1)(X-2)$. Pour $Q = \frac{B}{X-\lambda}$:
$XQ = \lambda Q + (X-\lambda)Q = \lambda Q + B$, donc le reste de XQ par B est λQ : $u(Q) = \lambda Q$.

c) Trois valeurs propres distinctes $1, -1, 2$ en dimension 3 : diagonalisable, de vecteurs propres $(X+1)(X-2)$, $(X-1)(X-2)$, $(X-1)(X+1)$ (une base de Lagrange à constantes près). Si B avait une racine double, $\pi_u = \chi_u = B$ (une matrice compagnon a toujours $\pi = \chi$) ne serait pas à racines simples : u ne serait pas diagonalisable.

Réponse. C compagnon, $\chi_C = B = (X-1)(X+1)(X-2)$; vecteurs propres $\frac{B}{X-\lambda}$; diagonalisable car racines simples.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).