Plaquette 4 – Polynômes annulateurs en action : puissances, racines carrées, commutation

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Réflexes.

— Si $P(A)=0$ et $X^n = PQ + R$, alors $A^n = R(A)$.

— **Racine multiple** : si $(X-a)^m \mid P$, on évalue $R, R', \dots, R^{(m-1)}$ en a.

— $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A$, de base $(I, A, \dots, A^{d-1})$.

— **Spectre de** $P(A)$: si $AX = \lambda X$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$; sur $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}P(A) = P(\mathrm{Sp}A)$.

— **Endomorphisme induit** : si F est stable par u, $\pi_{u_F} \mid \pi_u$; en particulier u diagonalisable $\Rightarrow u_F$ diagonalisable.

— **Projecteurs spectraux** pour $\pi_u = \prod (X-\lambda_i)$ à racines simples :

$$p_i = L_i(u) = \prod_{j \neq i} \frac{u - \lambda_j \mathrm{id}}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Correction de l'exercice 1 – Puissances avec une racine double

a) $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. Comme $(A-I)(A-2I) \neq 0$ (le bloc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable), $\pi_A = \chi_A$.

b) $R_n(1) = 1$ donne $\gamma = 1$; $R_n'(1) = n$ (dérivée de X^n en la racine double) donne $\beta = n$; $R_n(2) = 2^n$ donne $\alpha + n + 1 = 2^n$:

$$R_n = (2^n - n - 1)(X-1)^2 + n(X-1) + 1$$

c) $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N^2 = \mathrm{diag}(0,0,1)$. Donc

$$A^n = (2^n - n - 1)N^2 + nN + I = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

— ce que confirme le calcul par blocs.

Réponse. $R_n = (2^n - n - 1)(X-1)^2 + n(X-1) + 1$; $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 – Exponentielle d'un projecteur

a) $P^k = P$ pour $k \geq 1$, donc

$$E(t) = I + \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} P = I + (\mathrm{e}^t - 1)P$$

b) $E(t)E(s) = I + (\mathrm{e}^t - 1 + \mathrm{e}^s - 1)P + (\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^s - 1)P$, et $(\mathrm{e}^t - 1) + (\mathrm{e}^s - 1) + (\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^s - 1) = \mathrm{e}^{t+s} - 1$. Donc $E(t)E(s) = E(t+s)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $E(t)E(-t) = E(0) = I$: $E(t)^{-1} = I + (\mathrm{e}^{-t} - 1)P$.

Réponse. $E(t) = I + (\mathrm{e}^{t} - 1)P$; $E(t)^{-1} = E(-t)$.

Correction de l'exercice 3 – Racine carrée d'une matrice symétrique

a) $\chi_A = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$, racines simples : $\pi_A = \chi_A$, valeurs propres 1 et 3.

b) Lagrange : $Q = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}(X-1)$.

c) $Q^2 - X$ s'annule en 1 et en 3, donc est divisible par π_A : $Q(A)^2 = A$. Avec $c = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $M = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ($M^2 = 2M$), on vérifie directement $B^2 = I + (2c + 2c^2)M = I + M$, car $2c + 2c^2 = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1$. Ainsi

$$B = I + \frac{\sqrt{3}-1}{2}M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Réponse. $B = I + \frac{\sqrt{3}-1}{2}(A - I)$, $B^2 = A$.

Correction de l'exercice 4 – Les solutions de M² = I

a) $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples et annule M : M est diagonalisable à valeurs propres dans $\{1, -1\}$. Réciproquement, une telle matrice diagonale vérifie $D^2 = I$, et $(PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = I$.

b) La trace de $\mathrm{diag}(I_p, -I_{n-p})$ vaut $p - (n-p) = 2p - n$, qui détermine p :

$$p = \frac{n + \mathrm{tr}M}{2}$$

— Même trace ⇔ même p ⇔ semblables (deux matrices diagonalisables de mêmes valeurs propres avec multiplicités sont semblables).

c) $p \in \{0, \dots, n\}$: $n + 1$ classes.

Réponse. M symétrie ; classe déterminée par $p = \frac{n + \mathrm{tr}M}{2}$; $n + 1$ classes.

Correction de l'exercice 5 – Si A³ + A = 0, le rang de A est pair

a) $X^3 + X = X(X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et annule A.

b) χ_A est à coefficients réels : si i est racine d'ordre m, son conjugué $-i$ l'est aussi au même ordre (conjuguer $\chi_A = (X-i)^m Q$). Donc $\chi_A = X^{n-2m}(X^2+1)^m$.

c) A est semblable sur $\mathbb{C}$ à $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, i, \dots, i, -i, \dots, -i)$; le rang ne dépend pas du corps et vaut le nombre de valeurs propres non nulles :

$$\mathrm{rg}A = m + m = 2m$$

— Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = -I$, donc $A^3 + A = 0$, et son rang vaut 2.

Réponse. Diagonalisable sur $\mathbb{C}$; multiplicités de $\pm i$ égales ; $\mathrm{rg}A = 2m$ pair.

Correction de l'exercice 6 – Suite récurrente d'ordre 3

a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (compagnon) et $\chi_C = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

b) $\chi_C = (X-1)(X+1)(X-2)$, à racines simples : C est diagonalisable et chaque

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

coordonnée de $U_n = C^n U_0$ est combinaison de 1^n, $(-1)^n$, 2^n.

c) Système : $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha-\beta+2\gamma=2$, $\alpha+\beta+4\gamma=6$. La première et la troisième donnent $3\gamma=3$, $\gamma=1$; puis $\alpha+\beta=2$ et $\alpha-\beta=0$: $\alpha=\beta=1$.

$$u_n = 1+(-1)^n+2^n$$

— Vérification : $u_3 = 2\times 6+2-2\times 3 = 8$ et $1-1+8=8$ ✓.

Réponse. $u_n = 1+(-1)^n+2^n$.

Correction de l’exercice 7 – Trace des puissances et nilpotence

a) A nilpotente a pour seule valeur propre 0 ; trigonalisée, A^k est triangulaire de diagonale nulle, donc de trace nulle.

b) A est trigonalisable, et A^k a pour valeurs propres les λ^k avec les mêmes multiplicités :

$$\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{j=1}^{r} m_j \lambda_j^k = 0, \qquad k = 1,\dots,r$$

c) La matrice $(\lambda_j^k)_{1\le k,j\le r}$ a pour déterminant $\lambda_1\cdots\lambda_r V(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\neq 0$ (valeurs non nulles et distinctes). Le système impose $m_j=0$: contradiction si $r\ge 1$. Donc $\operatorname{Sp}A=\{0\}$, $\chi_A = X^n$ et, par Cayley-Hamilton, $A^n=0$.

Réponse. A nilpotente $\Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^k)=0$ pour $k=1,\dots,n$ (Vandermonde).

Correction de l’exercice 8 – Inverse d’une matrice unipotente

a) $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $N^3=0$.

b) $(I+N)(I-N+N^2) = I+N^3 = I$, donc

$$A^{-1} = I-N+N^2 = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) I et N commutent : $A^n = \sum_k \binom{n}{k} N^k = I + nN + \binom{n}{2}N^2$, soit

$$A^n = \begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

— Pour $n=-1$, la formule donne $\binom{-1}{2}=1$: on retrouve A^{-1}.

Réponse. $A^{-1}=I-N+N^2$; $A^n = I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2$.

Correction de l’exercice 9 – Spectre d’un polynôme en A

a) $AX=\lambda X$ avec $X\neq 0$ donne $A^kX=\lambda^kX$, puis $P(A)X=P(\lambda)X$.

b) Si P est constant, le résultat est immédiat. Sinon, $P(A)-\mu I = c\prod(A-z_kI)$ n’est pas inversible, donc l’un des facteurs $A-z_kI$ ne l’est pas : $z_k\in\operatorname{Sp}A$ et $P(z_k)=\mu$. Ainsi

$$\operatorname{Sp}P(A) = \{P(\lambda)\mid \lambda\in\operatorname{Sp}A\}$$

c) $P=X^2+X$: $P(1)=2$, $P(-2)=2$, $P(i)=-1+i$. $\operatorname{Sp}(A^2+A)=\{2,-1+i\}$ (deux valeurs propres de A peuvent donner la même).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathrm{Sp}P(A) = P(\mathrm{Sp}A)$; ici $\{2, -1+i\}$.

Correction de l'exercice 10 – Si A² est diagonalisable et A inversible

a) A^2 diagonalisable : π_{A^2} est scindé à racines simples. A^2 est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre : les μ_i sont non nuls.

b) $Q(A) = \pi_{A^2}(A^2) = 0$. Choisissons δ_i avec $\delta_i^2 = \mu_i$; alors

$$Q = \prod_{i=1}^{r} (X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

— Les $2r$ racines $\pm\delta_i$ sont distinctes : $\delta_i \neq -\delta_i$ car $\mu_i \neq 0$, et $\pm\delta_i \neq \pm\delta_j$ car $\mu_i \neq \mu_j$.

c) A admet un annulateur scindé à racines simples : diagonalisable. Contre-exemple non inversible : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = 0$ diagonalisable mais A non diagonalisable (nilpotente non nulle).

Réponse. $Q = \prod (X^2 - \mu_i)$ à racines simples annule A ; contre-exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 – Projecteurs spectraux explicites

a) $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, facteurs premiers entre eux : lemme des noyaux.

b) $p + q = \mathrm{id}$ et $pq = -(u - 2\,\mathrm{id})(u - \mathrm{id}) = 0$, donc $p^2 = p(\mathrm{id} - q) = p$ et de même $q^2 = q$. De plus $(u - \mathrm{id})p = 0$: $\mathrm{Im}\, p \subset \ker(u - \mathrm{id})$; $(u - 2\,\mathrm{id})q = 0$: $\mathrm{Im}\, q \subset \ker(u - 2\,\mathrm{id})$. Ce sont les projecteurs de la décomposition (ce sont les $L_i(u)$ de Lagrange).

c) $u = p + 2q$ (car $up = p$, $uq = 2q$ et $p + q = \mathrm{id}$), et comme $pq = qp = 0$:

$$u^n = p + 2^n q = (2 - 2^n)\,\mathrm{id} + (2^n - 1)\,u$$

Réponse. $p = 2\,\mathrm{id} - u$, $q = u - \mathrm{id}$; $u^n = (2 - 2^n)\mathrm{id} + (2^n - 1)u$.

Correction de l'exercice 12 – Dimension de K[J]

a) Chaque coefficient de J^2 vaut $\sum_k 1 \times 1 = n$: $J^2 = nJ$. Ainsi $X(X-n)$ annule J ; $J \neq 0$ et $J \neq nI$, donc $\pi_J = X(X-n)$.

b) $\dim \mathbb{R}[J] = \deg \pi_J = 2$, base (I, J).

c) On cherche l'inverse dans $\mathbb{R}[J]$: $(aI + bJ)(\alpha I + \beta J) = a\alpha I + (a\beta + b\alpha + nb\beta)J$. Il faut $a\alpha = 1$ et $a\beta + b\alpha + nb\beta = 0$, d'où, si $a \neq 0$ et $a + nb \neq 0$ (valeurs propres a et $a + nb$ non nulles) :

$$(aI + bJ)^{-1} = \frac{1}{a} I - \frac{b}{a(a+nb)} J$$

Réponse. $\pi_J = X(X-n)$; $\dim \mathbb{R}[J] = 2$; $(aI + bJ)^{-1} = \frac{1}{a} I - \frac{b}{a(a+nb)} J$.

Correction de l'exercice 13 – Codiagonalisation

a) Si $u(x) = \lambda x$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$: $v(x) \in E_\lambda(u)$.

b) Le polynôme minimal de l'induit v_λ divise π_v, scindé à racines simples ; il est donc lui-même scindé à racines simples :

$$\pi_{v_\lambda} \mid \pi_v \implies v_\lambda \text{ diagonalisable}$$

c) Dans chaque $E_\lambda(u)$, on choisit une base de vecteurs propres de v_λ ; ce sont aussi des vecteurs propres de u (pour λ). Comme $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda(u)$, la réunion de ces bases est une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

base de E qui diagonalise u et v.

Réponse. Les $E_\lambda(u)$ sont stables par v, v y est diagonalisable : base commune.

Correction de l'exercice 14 – Endomorphisme induit sur un plan stable

a) Par blocs, $\pi_A = \text{ppcm}(X^2+1, X-2) = (X^2+1)(X-2)$.

b) $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = -e_1$: P est stable, l'induit est la rotation d'angle droit, de polynôme minimal X^2+1 (qui divise bien π_A).

c) Une droite stable est engendrée par un vecteur propre réel : seule valeur propre réelle 2, d'où l'unique droite $\text{Vect}(e_3)$. Pour un plan stable F, le polynôme minimal de l'induit divise π_A et est de degré ≤ 2 : c'est $X-2$ ou X^2+1. Le premier cas donnerait $F \subset \ker(A-2I) = \text{Vect}(e_3)$, impossible pour un plan ; le second donne $F \subset \ker(A^2+I) = P$, donc $F = P$. Bilan :

$$\text{droite stable : } \text{Vect}(e_3), \qquad \text{plan stable : } \text{Vect}(e_1, e_2)$$

Réponse. $\pi_A = (X^2+1)(X-2)$; seule droite stable $\text{Vect}(e_3)$, seul plan stable $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la matrice J - I

a) $J^2 = 3J$, donc $(A+I)^2 = 3(A+I)$, soit $A^2 + 2A + I = 3A + 3I$:

$$A^2 - A - 2I = (A-2I)(A+I) = 0$$

— A n'est pas scalaire, donc $\pi_A = (X-2)(X+1)$: racines simples, A diagonalisable de spectre $\{2, -1\}$ (-1 double, car $\text{tr}A = 0 = 2-1-1$).

b) $A(A-I) = 2I$, donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $X^n = (X-2)(X+1)Q + aX + b$: $2a+b = 2^n$, $-a+b = (-1)^n$, d'où $a = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$, $b = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ et $A^n = aA + bI$.

d) Le coefficient $(1,1)$ de A^n vaut $b = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$: c'est le nombre de chemins de longueur n du sommet 1 à lui-même dans le triangle (pour $n=2$: 2 ; pour $n=3$: 2).

Réponse. $\pi_A = (X-2)(X+1)$; $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I)$; $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).