Plaquette 1 – Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal et lemme des noyaux

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Polynômes d'un endomorphisme.

— Pour $P = \sum a_k X^k$ et $u \in L(E)$: $P(u) = \sum a_k u^k$ (avec $u^0 = \mathrm{id}$).

— L'application $P \mapsto P(u)$ est un **morphisme d'algèbres** : $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, et deux polynômes en u **commutent** toujours.

— **Polynôme annulateur** : P tel que $P(u) = 0$. L'ensemble des annulateurs est un **idéal** de $\mathrm{K}[X]$.

— **Polynôme minimal** π_u : générateur unitaire de cet idéal ; il **divise** tout annulateur.

— En dimension finie, π_u existe et $\deg \pi_u \leq n^2$ (en fait $\leq n$ par Cayley-Hamilton).

Théorèmes clés.

— **Cayley-Hamilton** : le polynôme caractéristique χ_u annule u, donc $\pi_u \mid \chi_u$.

— **Lemme des noyaux** : si $P = P_1 P_2 \cdots P_r$ avec les P_i **deux à deux premiers entre eux**, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$$

et les projecteurs associés sont des **polynômes en** u.

— **Critère de diagonalisabilité** : u est diagonalisable **si et seulement si** π_u est **scindé à racines simples**.

— **Critère de trigonalisabilité** : u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ π_u (ou χ_u) est **scindé**. Sur $\mathbb{C}$, c'est toujours le cas.

— Les **racines de** π_u sont exactement les **valeurs propres** de u.

— **Inversibilité** : si $P(u) = 0$ avec $P(0) \neq 0$, alors u est inversible et u^{-1} est un polynôme en u.

Correction de l'exercice 1 – Polynôme annulateur et inverse

Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ annule u, et $P(0) = 2 \neq 0$.

— On isole l'identité : $u^2 - 3u = -2\,\mathrm{id}$, soit

$$u \circ \left(\frac{3\,\mathrm{id} - u}{2} \right) = \mathrm{id}$$

— Donc u est **inversible** et $u^{-1} = \dfrac{3\,\mathrm{id} - u}{2}$.

— **Vérification** : $u\left(\frac{3\mathrm{id} - u}{2}\right) = \frac{3u - u^2}{2} = \frac{3u - (3u - 2\mathrm{id})}{2} = \mathrm{id}$ ✓

— **Principe général** : si $P(u) = 0$ avec $P(0) \neq 0$, l'écriture $P = XQ + P(0)$ donne $u \circ \left(-\frac{Q(u)}{P(0)} \right) = \mathrm{id}$ — l'inverse est toujours un **polynôme en** u.

Réponse. $u^{-1} = \dfrac{3\,\mathrm{id} - u}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Polynôme minimal d'un projecteur

— $p^2 = p$, donc $X^2 - X = X(X-1)$ est **annulateur** : $\pi_p \mid X(X-1)$.
— **Élimination des cas dégénérés** : $\pi_p = X$ donnerait $p = 0$; $\pi_p = X - 1$ donnerait $p = \mathrm{id}$. Tous deux exclus.
— Donc $\pi_p = X(X-1)$.
— **Diagonalisabilité** : π_p est **scindé à racines simples** (0 et 1), donc p est **diagonalisable**.
— **Décomposition** : $E = \ker p \oplus \ker(p - \mathrm{id}) = \ker p \oplus \mathrm{Im} p$, ce qu'on retrouve par le lemme des noyaux.
— **Matrice réduite** : dans une base adaptée, p a pour matrice $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, avec $\mathrm{rg}(p)$ coefficients 1.

Réponse. $\pi_p = X(X-1)$: p est diagonalisable.

Correction de l'exercice 3 – Polynôme minimal d'une symétrie

— $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule s.
— Les cas $\pi_s = X - 1$ ($s = \mathrm{id}$) et $\pi_s = X + 1$ ($s = -\mathrm{id}$) sont exclus, donc $\pi_s = X^2 - 1$.
— **Racines simples** ± 1 : s est **diagonalisable**, de valeurs propres 1 et -1.
— **Lemme des noyaux** : $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$ — les **invariants** et les **anti-invariants**.
— **Projecteurs associés** : $p_+ = \dfrac{\mathrm{id} + s}{2}$ et $p_- = \dfrac{\mathrm{id} - s}{2}$; ce sont bien des **polynômes en** s, conformément au lemme.
— **Contrôle** : $p_+ + p_- = \mathrm{id}$ et $p_+ p_- = \dfrac{\mathrm{id} - s^2}{4} = 0$ ✓

Réponse. $\pi_s = X^2 - 1$; $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$.

Correction de l'exercice 4 – Lemme des noyaux

— $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ annule u, donc $\ker P(u) = E$.
— Les trois facteurs X, $X-1$, $X+1$ sont **deux à deux premiers entre eux** (racines distinctes).
— Le **lemme des noyaux** donne directement

$$E = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$$

— **Conséquence** : π_u divise $X(X-1)(X+1)$, donc est scindé à racines simples : u est **diagonalisable**, de valeurs propres dans $\{-1, 0, 1\}$.
— **Exemple** : la matrice $\mathrm{diag}(1, 0, -1)$ vérifie bien $A^3 = A$.
— **Remarque** : certains des trois sous-espaces peuvent être **nuls** — le lemme n'affirme pas qu'ils sont tous non triviaux.

Réponse. Lemme des noyaux appliqué à $X(X-1)(X+1)$.

Correction de l'exercice 5 – Polynôme minimal d'une matrice

— **Polynôme caractéristique** (matrice triangulaire) : $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$.
— π_A divise χ_A et a **les mêmes racines** (2 et 3, valeurs propres) : les candidats sont $(X-2)(X-3)$ et $(X-2)^2(X-3)$.
— **Test du plus petit** : calculons $(A - 2I)(A - 3I)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad A-3I=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

— Le produit vaut $\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$.

— Donc $\pi_A=(X-2)^2(X-3)=\chi_A$.

— **Conclusion** : π_A n'est **pas** à racines simples, A n'est **pas diagonalisable** — cohérent avec le bloc de Jordan $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

Réponse. $\pi_A=(X-2)^2(X-3)$; A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 6 – Cayley-Hamilton

— **Polynôme caractéristique** : $\chi_A=X^2-\operatorname{tr}(A)X+\det A=X^2-5X-2$.

— **Vérification** : $A^2=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$, et

$$A^2-5A-2I=\begin{pmatrix}7-5-2&10-10\\15-15&22-20-2\end{pmatrix}=0$$

— Cayley-Hamilton est bien vérifié ✓

— **Inverse** : de $A^2-5A=2I$ on tire $A\left(\frac{A-5I}{2}\right)=I$, donc

$$A^{-1}=\frac{A-5I}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}$$

— **Contrôle avec la formule usuelle** : $\det A=-2$ et $\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$ — même résultat ✓

Réponse. $\chi_A=X^2-5X-2$ et $A^{-1}=\dfrac{A-5I}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Diagonalisabilité par le polynôme minimal

$P=X^3-1$ est annulateur.

— **Sur** $\mathbb{C}$: $X^3-1=(X-1)(X-j)(X-j^2)$ est **scindé à racines simples**, donc π_A aussi : A est **diagonalisable sur** $\mathbb{C}$.

— **Sur** $\mathbb{R}$: $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$, et X^2+X+1 n'a pas de racine réelle. Le polynôme minimal est donc $X-1$ ou X^2+X+1 ou leur produit.

— A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** $\pi_A=X-1$, c'est-à-dire $A=I$.

— **Contre-exemple** : la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, de matrice $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, vérifie $A^3=I$ sans être diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (aucun vecteur propre réel).

— **Leçon** : la diagonalisabilité **dépend du corps**.

Réponse. Oui sur $\mathbb{C}$; sur $\mathbb{R}$ seulement si $A=I$.

Correction de l'exercice 8 – Sous-espaces stables

Le point clé : u **commute** avec $P(u)$.

— **Noyau** : soit $x\in\ker P(u)$. Alors

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(u)(u(x)) = u(P(u)(x)) = u(0) = 0$$

donc $u(x) \in \ker P(u)$.

— **Image** : soit $y = P(u)(x) \in \mathrm{Im} P(u)$. Alors $u(y) = u(P(u)(x)) = P(u)(u(x)) \in \mathrm{Im} P(u)$.
— **Conclusion** : les deux sous-espaces sont **stables**.
— **Portée** : c'est le mécanisme fondamental de la réduction — on découpe E en sous-espaces stables (noyaux itérés, sous-espaces propres, caractéristiques) pour y lire u sous forme simple.
— **Cas particulier** : $P = X - \lambda$ donne la stabilité du **sous-espace propre** E_λ.

Réponse. u commute avec $P(u)$, d'où la stabilité des deux.

Correction de l'exercice 9 – Nilpotence

— X^p annule u, donc π_u divise X^p : il est de la forme X^k avec $k \leq p$.
— Comme $u^{p-1} \neq 0$, on a $k > p - 1$, donc $\pi_u = X^p$.
— **Valeurs propres** : ce sont les racines de π_u, donc 0 **est la seule valeur propre**.
— **Diagonalisabilité** : $\pi_u = X^p$ est à racines simples seulement si $p = 1$, c'est-à-dire $u = 0$. Un endomorphisme nilpotent non nul n'est **jamais** diagonalisable.
— **Contrôle** : s'il l'était, il serait semblable à $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0) = 0$, donc nul.
— **Conséquence** : $\chi_u = X^n$ (toutes les valeurs propres sont nulles), donc $p \leq n$ par Cayley-Hamilton — l'indice de nilpotence ne dépasse jamais la dimension.

Réponse. $\pi_u = X^p$, unique valeur propre 0, non diagonalisable si $p \geq 2$.

Correction de l'exercice 10 – Décomposition d'une matrice

— **Annulateur** : $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$.
— Les valeurs propres sont parmi les **racines** : 2 et 3.
— $(X - 2)(X - 3)$ est **scindé à racines simples**, et π_A le divise : π_A est donc aussi scindé à racines simples.
— **Conclusion** : A est **diagonalisable**, semblable à une matrice $\mathrm{diag}(2, \ldots, 2, 3, \ldots, 3)$.
— **Lemme des noyaux** : $\mathrm{K}^n = \ker(A - 2I) \oplus \ker(A - 3I)$.
— **Cas dégénérés** : si $\pi_A = X - 2$, alors $A = 2I$ (diagonalisable aussi) ; de même pour 3.
— **Application** : A^n se calcule aussitôt, $A^n = 2^n p_2 + 3^n p_3$ où p_2, p_3 sont les projecteurs spectraux, eux-mêmes polynômes en A : $p_3 = A - 2I$ et $p_2 = 3I - A$.

Réponse. Valeurs propres dans $\{2, 3\}$; A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 11 – Commutant et polynômes

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres, $u(e_i) = \lambda_i e_i$, et v commutant avec u.

— **Stabilité des droites propres** : $u(v(e_i)) = v(u(e_i)) = \lambda_i v(e_i)$, donc $v(e_i) \in E_{\lambda_i}$.
— Les valeurs propres étant **distinctes**, chaque E_{λ_i} est une **droite** engendrée par e_i : il existe μ_i avec $v(e_i) = \mu_i e_i$.
— **Interpolation de Lagrange** : il existe P de degré $\leq n - 1$ tel que $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i (les λ_i étant distincts).
— Alors $P(u)(e_i) = P(\lambda_i) e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$: les deux endomorphismes coïncident sur une base, donc $v = P(u)$.
— **Conclusion** : le commutant de u est $\mathrm{K}[u]$, de **dimension** n.
— **Hypothèse essentielle** : si une valeur propre est multiple, le commutant est strictement plus gros (par exemple le commutant de id est $L(E)$ tout entier).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. v est diagonale dans la même base, et Lagrange donne $v = P(u)$.

Correction de l'exercice 12 – Polynôme minimal de la dérivation

a) Dériver $n+1$ fois un polynôme de degré $\leq n$ donne 0, donc $D^{n+1} = 0$. Et $D^n(X^n) = n! \neq 0$.

b) X^{n+1} annule D, donc $\pi_D = X^k$ avec $k \leq n+1$; comme $D^n \neq 0$, $k = n+1$. Le degré de π_D égale la dimension $n+1$ et $\pi_D \mid \chi_D$ (unitaire de même degré) :

$$\pi_D = \chi_D = X^{n+1}$$

c) Seule valeur propre : 0 (racine de π_D). Si D était diagonalisable, il serait nul ; or $D \neq 0$. Non diagonalisable (π_D n'est pas à racines simples dès que $n \geq 1$).

d) $(\mathrm{id} + D) \circ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k = \mathrm{id} + (-1)^n D^{n+1} = \mathrm{id}$ (somme télescopique). Donc

$$(\mathrm{id} + D)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k$$

— Exemple : la solution polynomiale de $P + P' = X^2$ est $P = X^2 - 2X + 2$.

Réponse. $\pi_D = \chi_D = X^{n+1}$; non diagonalisable ; $(\mathrm{id} + D)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k$.

Correction de l'exercice 13 – Le polynôme minimal ne dépend pas du corps

a) $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ annule A : il est multiple de $\pi_{\mathbb{C}}$.

b) $0 = \pi_{\mathbb{C}}(A) = P(A) + iQ(A)$ avec $P(A)$, $Q(A)$ réelles : parties réelle et imaginaire nulles.

c) $\pi_{\mathbb{C}}$ est unitaire de degré d, donc P est unitaire de degré d et annule A : $\pi_{\mathbb{R}} \mid P$, d'où $\deg \pi_{\mathbb{R}} \leq d$. Avec a), $\pi_{\mathbb{C}} \mid \pi_{\mathbb{R}}$, tous deux unitaires et $\deg \pi_{\mathbb{R}} \leq \deg \pi_{\mathbb{C}}$:

$$\pi_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{C}}$$

d) $A^2 = -I$, donc $X^2 + 1$ annule A ; A n'est pas scalaire, donc $\pi_A = X^2 + 1$. Sur $\mathbb{R}$, π_A n'est pas scindé : pas diagonalisable (ni même trigonalisable). Sur $\mathbb{C}$, $\pi_A = (X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples : diagonalisable, de valeurs propres $\pm i$.

Réponse. $\pi_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{C}}$; pour la rotation d'angle droit, $\pi_A = X^2 + 1$: diagonalisable sur $\mathbb{C}$ seulement.

Correction de l'exercice 14 – Polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs

a) Par produit par blocs, $M^k = \mathrm{diag}(A^k, B^k)$, puis par linéarité $P(M) = \mathrm{diag}(P(A), P(B))$.

b) $P(M) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$ et $P(B) = 0 \Leftrightarrow \pi_A \mid P$ et $\pi_B \mid P \Leftrightarrow \mathrm{ppcm}(\pi_A, \pi_B) \mid P$. L'idéal annulateur de M est engendré par le ppcm :

$$\pi_M = \mathrm{ppcm}(\pi_A, \pi_B)$$

c) Le bloc $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(J - I)^2 = 0$ et $J \neq I$: $\pi_J = (X-1)^2$. Les blocs (1) et (2) ont pour polynômes minimaux $X - 1$ et $X - 2$. Donc

— $\pi_M = \mathrm{ppcm}((X-1)^2, X-1, X-2) = (X-1)^2(X-2)$;
— $\chi_M = (X-1)^3(X-2)$.
— π_M a une racine double : M n'est **pas** diagonalisable.

Réponse. $\pi_M = \mathrm{ppcm}(\pi_A, \pi_B)$; exemple : $\pi_M = (X-1)^2(X-2)$, $\chi_M = (X-1)^3(X-2)$, non diagonalisable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : calcul de puissances

a) - $\mathrm{tr}(A) = 3$ et $\det A = 0 - (-2) = 2$, donc $\chi_A = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.

— Les deux racines étant **distinctes**, $\pi_A = \chi_A$ et A est **diagonalisable**, de valeurs propres 1 et 2.

b) **Division euclidienne** : $X^n = \chi_A\, Q + aX + b$.

— En évaluant en 1 et en 2 (racines de χ_A) :

— $1 = a + b$ et $2^n = 2a + b$.

— Par soustraction : $a = 2^n - 1$, puis $b = 1 - a = 2 - 2^n$.

— **Cayley-Hamilton** : $\chi_A(A) = 0$, donc $A^n = aA + bI$:

$$A^n = (2^n - 1)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (2 - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

— **Vérification pour** $n = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ ; pour $n = 2$: $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, et le produit direct A^2 donne $\begin{pmatrix} 9-2 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ ✓

— **Méthode générale** : la division euclidienne par χ_A ramène **toute** puissance à une combinaison de $I, A, \ldots, A^{n-1}$.

Réponse. b) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).