Plaquette 5 – Polynômes : localisation des racines et grands classiques

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Outils pour les racines.

— Si $P = c\prod(X - a_i)$:

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}, \qquad \left(\frac{P'}{P}\right)' = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2}$$

— **Rolle** : entre deux racines réelles de P, il y a une racine de P'.

— **Borne de Cauchy** : toute racine z de $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ vérifie $|z| < 1 + \max|a_k|$.

— **Sommes de Newton** $p_k = \sum x_i^k$: si chaque racine vérifie $x^n = \ldots$, on somme cette relation.

— **Erreur d'interpolation** : $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

— **Cyclotomiques** : $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$, $\deg \Phi_d = \varphi(d)$.

Correction de l'exercice 1 – Borne de Cauchy pour les racines

a) $z^n = -\sum_{k<n} a_k z^k$, donc

$$|z|^n \leq M\sum_{k=0}^{n-1}|z|^k = M\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$$

b) On en déduit $|z| - 1 \leq M\left(1 - |z|^{-n}\right) < M$. Si $|z| \leq 1$, l'inégalité $|z| < 1 + M$ est vraie aussi (pour $M > 0$; si $M = 0$, $P = X^n$ et $z = 0$).

c) $M = 5$: toutes les racines sont de module < 6. $P(2) = 8 - 8 + 2 - 5 = -3 < 0$ et $P(3) = 27 - 18 + 3 - 5 = 7 > 0$: le TVI donne une racine dans $]2, 3[$.

Réponse. $|z| < 1 + M$; racines de module < 6, une racine réelle dans $]2, 3[$.

Correction de l'exercice 2 – Théorème de Gauss-Lucas

a) $\frac{P'}{P}(z) = \sum_i \frac{1}{z - a_i}$ et $P'(z) = 0$, $P(z) \neq 0$.

b) $\frac{1}{z - a_i} = \frac{\overline{z} - \overline{a}_i}{|z - a_i|^2}$; en conjuguant la relation de a) :

$$\sum_i \frac{z - a_i}{|z - a_i|^2} = 0 \implies z\sum_i \frac{1}{|z - a_i|^2} = \sum_i \frac{a_i}{|z - a_i|^2}$$

— d'où $z = \sum \lambda_i a_i$ avec des $\lambda_i > 0$ de somme 1.

c) z est barycentre à coefficients positifs des a_i. Si z est racine de P' et de P, c'est l'un des a_i. Dans tous les cas, z appartient à l'enveloppe convexe. (Pour P réel scindé, on retrouve que les racines de P' sont dans $[\min a_i, \max a_i]$.)

Réponse. $z = \sum \lambda_i a_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$: enveloppe convexe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Si P est scindé à racines simples sur R

a) Avec la dérivée logarithmique :

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - P'^2}{P^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2} < 0$$

b) En dehors des racines, on multiplie par $-P^2 < 0$: $P'^2 - PP'' > 0$. En une racine a_i, $P(a_i) = 0$ et $P'(a_i) \neq 0$ (racine simple), donc $P'^2 - PP'' = P'(a_i)^2 > 0$.

c) $P'^2 - PP'' = 4x^2 - 2(x^2-1) = 2x^2 + 2 > 0$ ✓.

Réponse. $P'^2 - PP'' = P^2 \sum \frac{1}{(x-a_i)^2} > 0$ hors racines, et $= P'(a_i)^2 > 0$ aux racines.

Correction de l'exercice 4 – L'équation P(X²) = P(X)²

a) $c = c^2$: $c = 0$ ou $c = 1$.

b) Coefficients dominants : $a_n = a_n^2$, donc $a_n = 1$.

c) $P = X^n + a_k X^k +$ (termes de degré $< k$). Alors

$$P(X)^2 = X^{2n} + 2a_k X^{n+k} + (\text{degrés} < n+k)$$

— Dans $P(X^2) = X^{2n} + a_k X^{2k} + \ldots$, aucun terme n'a un degré strictement compris entre $2k$ et $2n$. Comme $2k < n+k < 2n$, le coefficient de X^{n+k} y est nul, d'où $2a_k = 0$: contradiction.

— Solutions : $P = 0$ et $P = X^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Réponse. $P = 0$ ou $P = X^n$ ($n \geq 0$).

Correction de l'exercice 5 – Polynôme réciproque et cosinus de 2π/5

a) $(X-1)P = X^5 - 1$: les racines de P sont les racines cinquièmes de l'unité différentes de 1.

b) $\frac{P(x)}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1$ et $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, d'où $y^2 + y - 1$.

c) Pour $x = \mathrm{e}^{2i\pi/5}$, $y = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ est racine de $Y^2 + Y - 1$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$:

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

— De même $2\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. En regroupant les racines conjuguées :

— $P = \left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X + 1\right)$.

Réponse. $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $P = \left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X + 1\right)$.

Correction de l'exercice 6 – Sommes de Newton

a) $p_0 = 3$, $p_1 = \sigma_1 = 0$, $p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0 - 2 \times (-1) = 2$.

b) Chaque racine vérifie $x^3 = x + 1$, donc $x^{k+3} = x^{k+1} + x^k$; on somme sur les racines :

$$p_{k+3} = p_{k+1} + p_k$$

c) $p_3 = p_1 + p_0 = 3$, $p_4 = p_2 + p_1 = 2$, $p_5 = p_3 + p_2 = 5$. Par récurrence, les p_k sont entiers (conditions initiales entières et relation à coefficients entiers), alors que les racines sont irrationnelles (l'une réelle, deux complexes conjuguées).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $p_0, \dots, p_5 = 3, 0, 2, 3, 2, 5$; $p_{k+3} = p_{k+1} + p_k$.

Correction de l'exercice 7 – Un polynôme irréductible sur Q

a) $p^3 - 3pq^2 - q^3 = 0$: $p \mid q^3$ et $q \mid p^3$, avec $p \wedge q = 1$, donc (Gauss) $p = \pm 1$, $q = \pm 1$. Or $P(1) = -3$ et $P(-1) = 1$: pas de racine rationnelle.

b) Une factorisation non triviale d'un polynôme de degré 3 comporte un facteur de degré 1, donc une racine rationnelle. Impossible : P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

c) $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = 2\cos 3\theta$, donc $P(2\cos\theta) = 2\cos 3\theta - 1$, nul si $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}$ donnent trois valeurs distinctes de cos :

$$x \in \left\{2\cos\frac{\pi}{9},\ 2\cos\frac{5\pi}{9},\ 2\cos\frac{7\pi}{9}\right\} \approx \{1{,}879;\ -0{,}347;\ -1{,}532\}$$

Réponse. Irréductible sur $\mathbb{Q}$; racines $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{5\pi}{9}$, $2\cos\frac{7\pi}{9}$.

Correction de l'exercice 8 – Polynômes cyclotomiques

a) Chaque racine n-ième de l'unité a un ordre d divisant n, et est racine primitive d-ième : on regroupe les racines de $X^n - 1$ selon leur ordre. Les racines primitives n-ièmes sont les $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ avec $k \wedge n = 1$: il y en a $\varphi(n)$.

b) $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$, $\Phi_3 = X^2 + X + 1$, $\Phi_4 = X^2 + 1$ (racines $\pm i$), $\Phi_6 = X^2 - X + 1$ (racines $\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$).

c) $X^{12} - 1 = \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6\Phi_{12}$ et $\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6 = X^6 - 1$. Donc

$$\Phi_{12} = \frac{X^{12} - 1}{(X^6 - 1)(X^2 + 1)} = \frac{X^6 + 1}{X^2 + 1} = X^4 - X^2 + 1$$

— Degré $4 = \varphi(12)$ ✓.

Réponse. $\Phi_{12} = X^4 - X^2 + 1$.

Correction de l'exercice 9 – Erreur d'interpolation

a) g s'annule en $n + 2$ points distincts $(x_0, \dots, x_n, x)$. Par Rolle appliqué $n + 1$ fois, $g^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi \in]a, b[$.

b) $P^{(n+1)} = 0$ et la dérivée $(n+1)$-ième de $\prod(t - x_i)$ vaut $(n+1)!$, donc $0 = f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)!$. On reporte K dans $g(x) = 0$.

c) $P(0) = P(\pi) = 0$, $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$: $P = \frac{4x(\pi - x)}{\pi^2}$. Avec $|\sin'''| \le 1$ et, en posant $t = x - \frac{\pi}{2}$, $x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi) = t\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$, maximal en $t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$:

$$|\sin x - P(x)| \le \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}} = \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}} \approx 0{,}249$$

— (L'erreur réelle maximale est d'environ 0,056 : la borne est valable mais pessimiste.)

Réponse. $f - P = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod(x - x_i)$; $P = \frac{4x(\pi - x)}{\pi^2}$, erreur $\le \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}} \approx 0{,}249$.

Correction de l'exercice 10 – Polynômes de Bernstein

a) Pour $x \in [0, 1]$, si $S \sim B(n, x)$, alors $B_n(f)(x) = E\left[f\left(\frac{S}{n}\right)\right]$. Donc $B_n(1) = 1$ (binôme) et $B_n(X) = E\left[\frac{S}{n}\right] = x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $E\left[\frac{S^2}{n^2}\right] = \frac{V(S)+E(S)^2}{n^2} = \frac{nx(1-x)+n^2x^2}{n^2}$, d'où

$$B_n(X^2) = X^2 + \frac{X(1-X)}{n}$$

c) $|B_n(X^2) - X^2| = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n}$, avec égalité en $x = \frac{1}{2}$. La convergence uniforme vers X^2 est en $\frac{1}{n}$ (c'est le point de départ de la preuve du théorème de Weierstrass par Bernstein).

Réponse. $B_n(1) = 1$, $B_n(X) = X$, $B_n(X^2) = X^2 + \frac{X(1-X)}{n}$; écart maximal $\frac{1}{4n}$.

Correction de l'exercice 11 – Racines des polynômes orthogonaux

a) $\langle P_n, 1\rangle = \int_a^b P_n w = 0$; si P_n ne changeait pas de signe, $P_n w$ serait continue de signe constant et d'intégrale nulle, donc nulle : $P_n = 0$, exclu.

b) $P_n Q$ ne change plus de signe sur $]a,b[$ (les changements de signe se compensent), et n'est pas identiquement nul. Comme $\deg Q = r \le n-1$:

$$0 = \langle P_n, Q\rangle = \int_a^b P_n Q w \neq 0$$

— contradiction.

c) Donc $r \ge n$; chaque changement de signe est une racine (de multiplicité impaire) et $\deg P_n = n$: les x_i sont exactement n racines simples dans $]a,b[$. (Exemple : $X^2 - \frac{1}{3}$, orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$ sur $[-1,1]$, a pour racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.)

Réponse. P_n a n racines simples dans $]a,b[$.

Correction de l'exercice 12 – Polynômes de Hermite

a) $(\mathrm{e}^{-x^2})' = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $(\mathrm{e}^{-x^2})'' = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$. Donc $H_0 = 1$, $H_1 = 2X$, $H_2 = 4X^2 - 2$.

b) Notons $g = \mathrm{e}^{-x^2}$, de sorte que $g^{(n)} = (-1)^n H_n g$. En dérivant :

$$g^{(n+1)} = (-1)^n (H_n' - 2xH_n) g = (-1)^{n+1}(2xH_n - H_n')g$$

— d'où $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$. Par récurrence, $\deg H_{n+1} = n+1$ et le coefficient dominant est multiplié par 2. $H_3 = 2X(4X^2-2) - 8X = 8X^3 - 12X$.

c) Par récurrence : si H_n a la parité de n, XH_n et H_n' ont la parité de $n+1$.

Réponse. $H_2 = 4X^2 - 2$, $H_3 = 8X^3 - 12X$; degré n, coefficient dominant 2^n, parité de n.

Correction de l'exercice 13 – Formule de Rodrigues et racines

a) ± 1 sont racines d'ordre n de U ; la dérivée k-ième a ces racines à l'ordre $n-k \ge 1$.

b) $k = 0$: rien à montrer. Si $U^{(k)}$ $(k \le n-1)$ s'annule en $-1 < y_1 < \ldots < y_k < 1$ et en ± 1, Rolle fournit une racine de $U^{(k+1)}$ dans chacun des $k+1$ intervalles :

$$]-1, y_1[,\ ]y_1, y_2[,\ \ldots,\ ]y_k, 1[$$

c) $\deg U = 2n$, donc $\deg L_n = n$ (coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!}$). Par b), L_n a au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$: ce sont toutes ses racines, et elles sont simples. (L_n est, à constante près, le n-ième polynôme de Legendre.)

Réponse. L_n, de degré n, a n racines simples dans $]-1,1[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Une identité d'interpolation

a) $P = \sum y_i L_i$ avec $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$, de coefficient dominant $\frac{1}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$ devant X^{n-1}.

b) Pour $k \leq n-1$, le polynôme interpolateur des valeurs x_i^k est X^k lui-même (degré $\leq n-1$, unicité). Son coefficient de X^{n-1} vaut 1 si $k = n-1$, 0 sinon :

$$S_k = \delta_{k,\,n-1}$$

c) Dénominateurs : $(0-1)(0-2) = 2$, $(1-0)(1-2) = -1$, $(2-0)(2-1) = 2$.
$S_1 = 0 - 1 + 1 = 0$ ✓ et $S_2 = 0 - 1 + 2 = 1$ ✓.

Réponse. $S_k = 0$ pour $k \leq n-2$, $S_{n-1} = 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la propriété minimax de Tchebychev

a) $|\cos n\theta| \leq 1$ donne $\|T_n\| \leq 1$, avec égalité en $x = 1$. Et $T_n(y_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

b) Q est de degré $\leq n-1$ (les termes X^n se simplifient). En y_k :

$$Q(y_k) = (-1)^k 2^{1-n} - P(y_k), \quad |P(y_k)| < 2^{1-n}$$

— donc $Q(y_k)$ est du signe de $(-1)^k$. Q change de signe entre deux y_k consécutifs : au moins n racines, pour un degré $\leq n-1$. Donc $Q = 0$, et $P = \widetilde{T}_n$, de norme 2^{1-n} : contradiction.

c) Tout polynôme unitaire de degré n vérifie $\|P\| \geq 2^{1-n}$, avec égalité pour $\widetilde{T}_n$. Pour $n = 2$: $\widetilde{T}_2 = X^2 - \frac{1}{2}$, de norme $\frac{1}{2}$ (par exemple X^2 a pour norme 1). C'est pourquoi les racines de T_n sont les meilleurs nœuds d'interpolation : elles minimisent $\|\prod (X - x_i)\|$ dans l'erreur d'interpolation.

Réponse. $\|P\| \geq 2^{1-n}$ pour P unitaire de degré n, égalité pour $2^{1-n}T_n$; $n = 2$: $X^2 - \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).