Plaquette 2 – Arithmétique de K[X] : division, PGCD, racines

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

K[X] se comporte comme $\mathbb{Z}$: **division euclidienne**, **algorithme d'Euclide**, **Bézout**, **Gauss**, décomposition en **irréductibles**. Pour obtenir un reste sans effectuer la division, on évalue en des **racines du diviseur** (et en ses dérivées pour une racine multiple). Une racine a est d'ordre $\geq m$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$. Les **relations coefficients-racines** donnent les fonctions symétriques des racines sans les calculer.

Exercice 1 – Division euclidienne et reste par évaluation

a) Effectuer la division euclidienne de $A = X^5 + 2X^3 - X + 1$ par $B = X^2 + 1$.

b) Retrouver le reste sans poser la division, en évaluant A en i.

Exercice 2 – Algorithme d'Euclide

Soit $A = X^5 - X^4 - X + 1$ et $B = X^4 + X^3 - X - 1$.

a) Calculer $A \wedge B$ par l'algorithme d'Euclide.

b) Retrouver le résultat en factorisant A et B.

Exercice 3 – Reste de X^n par $(X-1)^2$

Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$.

Exercice 4 – Reste par $X^2 + X + 1$

Soit $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

a) Montrer que $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ et que $X^3 \equiv 1 \pmod{X^2 + X + 1}$.

b) En déduire le reste de X^n selon n modulo 3.

c) Pour quels n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 5 – Racine double et paramètre

a) Déterminer les réels a pour lesquels $P = X^3 - 3X + a$ a une racine multiple. Factoriser P dans ces cas.

b) Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6 – Factorisation de $X^6 - 1$

a) Déterminer les racines complexes de $X^6 - 1$.

b) Factoriser $X^6 - 1$ en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Relations coefficients-racines

Soit a, b, c les racines complexes de $P = X^3 - 2X + 1$.

a) Donner $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$, $\sigma_3 = abc$.

b) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

c) Calculer $a^3 + b^3 + c^3$.

Exercice 8 – Relation de Bézout explicite

a) Montrer que $X^2 + 1$ et $X + 1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Trouver U, V tels que $(X^2 + 1)U + (X + 1)V = 1$.

c) En déduire l'inverse de la matrice $A + I$ lorsque $A^2 = -I$.

Exercice 9 – Partie sans facteur carré

Soit $P = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

a) Calculer P' et $P \wedge P'$.

b) En déduire les racines multiples de P puis sa factorisation.

c) Montrer en général que si P est scindé, $\frac{P}{P \wedge P'}$ a les mêmes racines que P, toutes simples.

Exercice 10 – Interpolation de Lagrange

a) Déterminer le polynôme P de degré ≤ 2 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 7$, à l'aide des polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2.

b) Décrire tous les polynômes Q (de degré quelconque) qui vérifient les mêmes conditions.

c) Montrer que $L_0 + L_1 + L_2 = 1$ et $0L_0 + 1L_1 + 2L_2 = X$.

Exercice 11 – Polynômes de Tchebychev

On définit $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

a) Calculer T_2, T_3. Montrer que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n ($n \geq 1$).

c) Déterminer les racines de T_n et en déduire sa factorisation.

Exercice 12 – Polynômes positifs sur R

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x.

a) Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.

b) En déduire que $P = cA\overline{A}$ avec $c \geq 0$ et $A \in \mathbb{C}[X]$.

c) En écrivant $A = B + iC$ (B, C réels), montrer que P est somme de deux carrés de polynômes réels.

d) Écrire $X^4 + 1$ comme somme de deux carrés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Si P est scindé sur R, P' aussi

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$, scindé sur $\mathbb{R}$, de racines distinctes $a_1 < \ldots < a_r$ de multiplicités $m_1, \ldots, m_r$.

a) Montrer que chaque a_i est racine de P' d'ordre $m_i - 1$.

b) Montrer, par le théorème de Rolle, que P' a au moins une racine dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.

c) Compter les racines obtenues et conclure que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 – L'équation P(X²) = P(X)P(X + 1)

On cherche les $P \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

a) Montrer que si a est racine, alors a^2 l'est aussi. En déduire que $a = 0$ ou $|a| = 1$.

b) Montrer que si a est racine, $(a-1)^2$ l'est aussi (évaluer en $a - 1$). En déduire que $a = 1$ ou $|a - 1| = 1$.

c) En déduire que les seules racines possibles sont 0 et 1, puis déterminer P.

Exercice 15 – Synthèse : racines de l'unité et produit de sinus

Soit $n \geq 2$ et $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

a) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$ et en déduire $\prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$.

b) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$.

c) Montrer que $|1 - \mathrm{e}^{i\theta}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$, puis

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

d) Vérifier pour $n = 3$ et $n = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).