Plaquette 3 – Polynômes et algèbre linéaire : bases et endomorphismes

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

L'espace $\mathrm{K}_n[X]$ (dimension $n+1$) est un terrain d'exercice idéal : on y dispose de plusieurs **bases naturelles** (canonique, de Taylor $(X-a)^k$, de Lagrange, binomiale) et d'**endomorphismes** classiques (dérivation, translation, différence finie, opérateurs différentiels). Pour étudier un endomorphisme u de $\mathrm{K}_n[X]$, on calcule l'image de X^k : très souvent la matrice est **triangulaire**, ce qui donne immédiatement les valeurs propres. Une famille **échelonnée en degré** est libre ; $n+1$ polynômes de degrés $0, 1, \dots, n$ forment une base.

Exercice 1 – L'endomorphisme de translation

Soit $\tau : P \mapsto P(X+1)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

a) Écrire la matrice T de τ dans la base $(1, X, X^2)$.

b) Montrer que τ est inversible et calculer T^{-1} sans pivot.

c) τ est-il diagonalisable ? Déterminer π_τ.

Exercice 2 – Formule de Taylor et base des $(X-a)^k$

a) Montrer que $(1, X-a, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathrm{K}_n[X]$.

b) Montrer que les coordonnées de P dans cette base sont les $\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

c) Écrire $P = X^3 - 2X + 1$ dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$.

Exercice 3 – Base de Lagrange et base duale

Soit $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts et $\varphi_i : P \mapsto P(x_i)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que l'application $\Phi : P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) En déduire que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de l'espace dual, et identifier sa base antéduale.

c) Montrer que toute forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $\psi = \sum \psi(L_i)\varphi_i$.

Exercice 4 – Méthode de Simpson

On cherche α, β, γ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(0) + \beta P\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma P(1)$$

a) Justifier l'existence et l'unicité de (α, β, γ) par l'exercice sur la base duale.

b) Les calculer en testant 1, X, X^2.

c) Montrer que la formule reste exacte pour X^3, mais pas pour X^4.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Interpolation de Hermite

a) Montrer que $\Psi : P \mapsto (P(0), P'(0), P(1), P'(1))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ sur $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$.
c) Interpréter P et $1 - P$ (lissage entre deux paliers).

Exercice 6 – Différence finie et somme des carrés

Soit $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $\deg \Delta P = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$, et que $\ker \Delta$ est l'ensemble des constantes.
b) Montrer que Δ induit une surjection de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
c) Trouver Q tel que $\Delta Q = X^2$ et $Q(0) = 0$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 7 – Polynômes à valeurs entières

On note $H_k = \binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ ($H_0 = 1$).

a) Montrer que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{Q}_n[X]$ et que $H_k(m) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier m.
b) Écrire X^3 dans cette base.
c) Montrer que $P = \sum c_k H_k$ prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si tous les c_k sont entiers (calculer $P(0), P(1), \ldots$ ou utiliser Δ).

Exercice 8 – L'endomorphisme P ↦ XP'

Soit $u : P \mapsto XP'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Calculer $u(X^k)$. En déduire que u est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
b) Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$.
c) Résoudre $XP' - 2P = X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \geq 3$).

Exercice 9 – L'opérateur de Legendre

Soit $L : P \mapsto ((X^2-1)P')' = (X^2-1)P'' + 2XP'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Calculer $L(X^k)$ et en déduire que la matrice de L dans la base canonique est triangulaire.
b) Montrer que L est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
c) Déterminer un vecteur propre unitaire de degré 2.

Exercice 10 – Orthogonalisation de 1, X, X²

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.
b) Orthogonaliser $(1, X, X^2)$ par Gram-Schmidt (sans normaliser).
c) Déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Le reste comme projecteur

Soit $B \in \mathrm{K}[X]$ de degré $d \geq 1$ et $\rho : \mathrm{K}_n[X] \to \mathrm{K}_n[X]$ ($n \geq d$) qui à P associe le reste de sa division par B.

a) Montrer que ρ est linéaire et que $\rho \circ \rho = \rho$.

b) Déterminer $\ker \rho$ et $\mathrm{Im}\rho$ et leurs dimensions.

c) Pour $B = X^2 - 1$, donner $\rho(X^k)$ selon la parité de k.

Exercice 12 – Déterminant de Vandermonde

Soit $V(x_0, \dots, x_n) = \det\left(x_i^j\right)_{0 \leq i,j \leq n}$.

a) Montrer que $P(X) = V(x_0, \dots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme de degré $\leq n$, de coefficient de X^n égal à $V(x_0, \dots, x_{n-1})$.

b) Déterminer ses racines lorsque les x_i sont distincts, et en déduire $V(x_0, \dots, x_n) = V(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i<n} (x_n - x_i)$.

c) Conclure et calculer $V(1, 2, 3)$.

Exercice 13 – Commutant de la dérivation

Soit D la dérivation sur $E = \mathrm{K}_n[X]$ et $e = \frac{X^n}{n!}$.

a) Montrer que $(e, D(e), \dots, D^n(e))$ est une base de E.

b) Soit $v \in L(E)$ commutant avec D. Écrire $v(e) = \sum a_k D^k(e)$ et montrer que $v = Q(D)$ avec $Q = \sum a_k X^k$.

c) En déduire la dimension du commutant de D. Exemple : la translation $\tau : P \mapsto P(X+1)$ commute avec D ; l'écrire comme polynôme en D.

Exercice 14 – Polynômes ayant une racine double imposée

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$, $n \geq 2$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel et que $F = (X-1)^2\,\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

b) En déduire $\dim F$ et une base de F.

c) Retrouver $\dim F$ à l'aide des formes linéaires $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P'(1)$.

Exercice 15 – Synthèse : multiplication par X modulo B

Soit $B = X^3 - 2X^2 - X + 2$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à P associe le reste de XP dans la division par B.

a) Écrire la matrice C de u dans la base $(1, X, X^2)$ et calculer χ_C.

b) Factoriser B. Montrer que $\frac{B}{X - \lambda}$ est vecteur propre de u pour chaque racine λ de B.

c) En déduire que u est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres. Que se passerait-il si B avait une racine double ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).