Plaquette 4 – Polynômes annulateurs en action : puissances, racines carrées, commutation

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un polynôme annulateur P de A transforme les questions sur A en questions sur les polynômes. Les **puissances** A^n s'obtiennent par le reste de X^n modulo P (évaluation aux racines, avec dérivées pour les racines multiples). Les **projecteurs spectraux** et les **racines carrées** s'écrivent comme polynômes en A par interpolation de Lagrange. Les liens de **commutation** (endomorphismes qui commutent, sous-espaces stables) se traitent par le lemme des noyaux et le fait que le polynôme minimal d'un endomorphisme induit **divise** π_u.

Exercice 1 – Puissances avec une racine double

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\pi_A = (X-1)^2(X-2)$.

b) Déterminer le reste R_n de X^n modulo π_A sous la forme $\alpha(X-1)^2 + \beta(X-1) + \gamma$.

c) En déduire A^n et vérifier sur la matrice.

Exercice 2 – Exponentielle d'un projecteur

Soit P une matrice de projecteur ($P^2 = P$) et, pour t réel, $E(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} P^k$.

a) Montrer que $E(t) = I + (\mathrm{e}^t - 1)P$.

b) Calculer $E(t)E(s)$ et vérifier que $E(t)E(s) = E(t+s)$.

c) En déduire l'inverse de $E(t)$.

Exercice 3 – Racine carrée d'une matrice symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer π_A et les valeurs propres de A.

b) Trouver $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(1) = 1$ et $Q(3) = \sqrt{3}$.

c) Montrer que $B = Q(A)$ vérifie $B^2 = A$, et calculer B.

Exercice 4 – Les solutions de M² = I

a) Montrer que $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = I$ si et seulement si M est semblable à $\mathrm{diag}(I_p, -I_{n-p})$ pour un $p \in [\![0, n]\!]$.

b) Montrer que deux telles matrices sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

c) Combien y a-t-il de classes de similitude de solutions ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Si A³ + A = 0, le rang de A est pair

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A = 0$.

a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres dans $\{0, i, -i\}$.

b) Montrer que i et $-i$ ont la même multiplicité (utiliser $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$).

c) En déduire que $\mathrm{rg} A$ est pair.

Exercice 6 – Suite récurrente d'ordre 3

On considère $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ avec $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$.

a) Écrire $U_{n+1} = CU_n$ avec $U_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$ et calculer χ_C.

b) Factoriser χ_C et en déduire la forme générale $u_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$.

c) Déterminer α, β, γ et vérifier u_3.

Exercice 7 – Trace des puissances et nilpotence

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si A est nilpotente, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

b) Réciproquement, on suppose $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres **non nulles distinctes**, de multiplicités $m_1, \ldots, m_r$. Écrire le système vérifié par les m_j.

c) Conclure que A est nilpotente.

Exercice 8 – Inverse d'une matrice unipotente

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I$.

a) Calculer N^2 et N^3.

b) En déduire A^{-1} comme polynôme en N, puis sa matrice.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ par la formule du binôme.

Exercice 9 – Spectre d'un polynôme en A

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) Montrer que si λ est valeur propre de A, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.

b) Réciproquement, soit μ valeur propre de $P(A)$. En factorisant $P - \mu = c\prod(X - z_k)$, montrer que l'un des z_k est valeur propre de A. En déduire $\mathrm{Sp}P(A) = P(\mathrm{Sp}A)$.

c) Application : valeurs propres de $A^2 + A$ lorsque $\mathrm{Sp}A = \{1, -2, i\}$.

Exercice 10 – Si A² est diagonalisable et A inversible

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable.

a) Écrire $\pi_{A^2} = \prod_{i=1}^{r}(X - \mu_i)$ avec des μ_i distincts et non nuls (pourquoi ?).

b) Montrer que $Q = \prod_i (X^2 - \mu_i)$ annule A et est à racines simples.

c) Conclure. Donner un contre-exemple si A n'est pas inversible.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Projecteurs spectraux explicites

Soit $u \in L(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id} = 0$, $u \neq \mathrm{id}$, $u \neq 2\,\mathrm{id}$.

a) Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id})$.

b) Montrer que $p = 2\,\mathrm{id} - u$ et $q = u - \mathrm{id}$ sont les projecteurs associés.

c) En déduire $u^n = p + 2^n q$, puis u^n en fonction de u.

Exercice 12 – Dimension de K[J]

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) la matrice dont tous les coefficients valent 1.

a) Calculer J^2 et en déduire π_J.

b) Déterminer $\dim \mathbb{R}[J]$ et une base.

c) Calculer $(aI + bJ)^{-1}$ lorsqu'elle existe.

Exercice 13 – Codiagonalisation

Soit u, v deux endomorphismes diagonalisables de E (dimension finie) qui commutent.

a) Montrer que chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v.

b) Montrer que l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ est diagonalisable.

c) En déduire une base commune de diagonalisation.

Exercice 14 – Endomorphisme induit sur un plan stable

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer π_A.

b) Montrer que le plan $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est stable et donner le polynôme minimal de l'induit.

c) Déterminer tous les sous-espaces stables de dimension 1 et 2.

Exercice 15 – Synthèse : la matrice J - I

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I$.

a) Montrer que $A^2 = A + 2I$. En déduire π_A, le spectre et la diagonalisabilité.

b) Calculer A^{-1}.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Interprétation : A est la matrice d'adjacence du triangle ; que compte le coefficient $(1,1)$ de A^n ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).