Plaquette 1 – Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal et lemme des noyaux

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule avec des **polynômes d'endomorphismes**, on détermine un **polynôme annulateur** puis le **polynôme minimal**, on applique le **lemme des noyaux** pour décomposer l'espace, et on relie ces outils au caractère diagonalisable.

Exercice 1 – Polynôme annulateur et inverse

Soit u tel que $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id} = 0$. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1}.

Exercice 2 – Polynôme minimal d'un projecteur

Soit p un projecteur non nul et différent de l'identité. Déterminer π_p et conclure sur sa diagonalisabilité.

Exercice 3 – Polynôme minimal d'une symétrie

Soit s une symétrie ($s^2 = \mathrm{id}$), avec $s \neq \pm\mathrm{id}$. Déterminer π_s et les sous-espaces propres.

Exercice 4 – Lemme des noyaux

Soit u tel que $u^3 = u$. Montrer que $E = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$.

Exercice 5 – Polynôme minimal d'une matrice

Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Cayley-Hamilton

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier Cayley-Hamilton et en déduire A^{-1}.

Exercice 7 – Diagonalisabilité par le polynôme minimal

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I$. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 8 – Sous-espaces stables

Soit u un endomorphisme et $P \in \mathrm{K}[X]$. Montrer que $\ker P(u)$ et $\mathrm{Im} P(u)$ sont stables par u.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Nilpotence

Soit u nilpotent d'indice p (c'est-à-dire $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$). Déterminer π_u et les valeurs propres de u.

Exercice 10 – Décomposition d'une matrice

Soit A telle que $A^2 = 5A - 6I$. Déterminer les valeurs propres possibles et montrer que A est diagonalisable.

Exercice 11 – Commutant et polynômes

Soit u diagonalisable à valeurs propres **deux à deux distinctes** $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que tout endomorphisme commutant avec u est un polynôme en u.

Exercice 12 – Polynôme minimal de la dérivation

Soit $D : P \mapsto P'$ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que $D^{n+1} = 0$ et $D^n \neq 0$.

b) En déduire π_D et χ_D.

c) D est-il diagonalisable ? Quelle est sa seule valeur propre ?

d) Montrer que $\mathrm{id} + D$ est inversible et exprimer son inverse comme polynôme en D.

Exercice 13 – Le polynôme minimal ne dépend pas du corps

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $\pi_{\mathbb{R}}$ son polynôme minimal sur $\mathbb{R}$, $\pi_{\mathbb{C}}$ celui sur $\mathbb{C}$ (en voyant $A \in M_n(\mathbb{C})$).

a) Montrer que $\pi_{\mathbb{C}} \mid \pi_{\mathbb{R}}$.

b) Écrire $\pi_{\mathbb{C}} = P + iQ$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(A) = 0$ et $Q(A) = 0$.

c) En déduire que $\pi_{\mathbb{C}} = \pi_{\mathbb{R}}$.

d) Application : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer π_A ; A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 14 – Polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A, B carrées.

a) Montrer que pour tout polynôme P, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$.

b) En déduire que $\pi_M = \mathrm{ppcm}(\pi_A, \pi_B)$.

c) Application : déterminer le polynôme minimal de $M = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (1), (2)\right)$ et de χ_M. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 15 – Synthèse : calcul de puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Déterminer χ_A et π_A.
b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).