Plaquette 5 – Polynômes : localisation des racines et grands classiques

Polynômes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les exercices d'oral sur les polynômes mêlent algèbre et analyse. Pour **localiser des racines**, on combine le théorème de Rolle, les changements de signe, les inégalités triangulaires et la **dérivée logarithmique** $\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{X - a_i}$. Pour une **équation fonctionnelle** en P, on examine le degré, le coefficient dominant puis les racines. Les familles classiques (Tchebychev, Legendre, Hermite, cyclotomiques, Bernstein) se traitent par récurrence, relation de récurrence ou formule explicite, et elles ont chacune une propriété remarquable à connaître.

Exercice 1 – Borne de Cauchy pour les racines

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $M = \max |a_k|$.

a) Soit z racine avec $|z| > 1$. Montrer que $|z|^n \leq M\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$.

b) En déduire $|z| < 1 + M$ pour toute racine z.

c) Application à $X^3 - 2X^2 + X - 5$. Montrer qu'il a une racine réelle dans $]2, 3[$.

Exercice 2 – Théorème de Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$, de racines $a_1, \ldots, a_n$ (avec multiplicité).

a) Soit z une racine de P' qui n'est pas racine de P. Montrer que $\sum_i \frac{1}{z - a_i} = 0$.

b) En conjuguant, montrer que $z = \sum_i \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i = \frac{|z - a_i|^{-2}}{\sum_j |z - a_j|^{-2}}$.

c) Conclure : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 3 – Si P est scindé à racines simples sur R

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$, scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

a) Montrer que sur tout intervalle sans racine, $\left(\frac{P'}{P}\right)' < 0$.

b) En déduire que $P'^2 - PP'' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

c) Vérifier pour $P = X^2 - 1$.

Exercice 4 – L'équation P(X²) = P(X)²

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$.

a) Traiter le cas des constantes.

b) Si P est de degré $n \geq 1$, montrer qu'il est unitaire.

c) On suppose $P \neq X^n$ et on note $k < n$ le plus grand indice tel que $a_k \neq 0$. Comparer les coefficients de X^{n+k} des deux membres et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Polynôme réciproque et cosinus de 2π/5

Soit $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Montrer que les racines de P sont les $e^{2ik\pi/5}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

b) Pour $x \neq 0$, montrer que $P(x) = x^2\left(y^2 + y - 1\right)$ avec $y = x + \frac{1}{x}$.

c) En déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ et la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 – Sommes de Newton

Soit x_1, x_2, x_3 les racines de $P = X^3 - X - 1$ et $p_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$.

a) Calculer p_0, p_1, p_2.

b) Montrer que $p_{k+3} = p_{k+1} + p_k$ pour $k \geq 0$.

c) Calculer p_3, p_4, p_5. Pourquoi les p_k sont-ils tous entiers ?

Exercice 7 – Un polynôme irréductible sur Q

Soit $P = X^3 - 3X - 1$.

a) Montrer que si $\frac{p}{q}$ (irréductible) est racine rationnelle, alors $p \mid 1$ et $q \mid 1$. En déduire que P n'a pas de racine rationnelle.

b) En déduire que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

c) En posant $X = 2\cos\theta$, déterminer les trois racines réelles de P.

Exercice 8 – Polynômes cyclotomiques

On définit $\Phi_n = \prod (X - \zeta)$, le produit portant sur les racines **primitives** n-ièmes de l'unité.

a) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$ et $\deg \Phi_n = \varphi(n)$.

b) Calculer Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_6.

c) En déduire Φ_{12}.

Exercice 9 – Erreur d'interpolation

Soit f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, $x_0, \ldots, x_n$ distincts dans $[a, b]$ et P le polynôme interpolateur de degré $\leq n$.

a) Pour x fixé distinct des x_i, on pose $g(t) = f(t) - P(t) - K\prod (t - x_i)$ avec K choisi pour que $g(x) = 0$. Montrer que $g^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi \in]a, b[$.

b) En déduire $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

c) Application : $f = \sin$ interpolée en 0, $\frac{\pi}{2}$, π. Donner P et un majorant de l'erreur sur $[0, \pi]$.

Exercice 10 – Polynômes de Bernstein

Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on pose $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1 - X)^{n-k}$.

a) Calculer $B_n(1)$ et $B_n(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer $B_n(X^2)$ (interpréter avec une loi binomiale).

c) En déduire $\sup_{[0,1]} |B_n(X^2) - X^2|$.

Exercice 11 – Racines des polynômes orthogonaux

Soit w continue strictement positive sur $[a,b]$ et $\langle P,Q\rangle = \int_a^b PQw$. Soit P_n de degré $n \geq 1$ orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a) Montrer que P_n change de signe au moins une fois dans $]a,b[$.

b) Soit $x_1 < \ldots < x_r$ les points de $]a,b[$ où P_n change de signe. On suppose $r < n$; montrer que $Q = \prod (X - x_i)$ contredit l'orthogonalité.

c) Conclure : P_n a n racines réelles simples dans $]a,b[$.

Exercice 12 – Polynômes de Hermite

On pose $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.

a) Calculer H_0, H_1, H_2.

b) Montrer que $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$. En déduire que H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n, et calculer H_3.

c) Montrer que H_n a la parité de n.

Exercice 13 – Formule de Rodrigues et racines

Soit $n \geq 1$, $U = (X^2-1)^n$ et $L_n = U^{(n)}$.

a) Montrer que pour $0 \leq k \leq n-1$, 1 et -1 sont racines de $U^{(k)}$ d'ordre $n-k$.

b) Montrer par récurrence que $U^{(k)}$ a au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$.

c) En déduire que L_n est de degré n et a n racines simples dans $]-1,1[$.

Exercice 14 – Une identité d'interpolation

Soit $x_1, \ldots, x_n$ distincts ($n \geq 2$).

a) Montrer que le coefficient de X^{n-1} du polynôme interpolateur de Lagrange de valeurs y_i en x_i est $\sum_i \frac{y_i}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$.

b) En déduire que $S_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$ vaut 0 pour $0 \leq k \leq n-2$ et 1 pour $k = n-1$.

c) Vérifier pour $(x_1,x_2,x_3) = (0,1,2)$, $k=1$ et $k=2$.

Exercice 15 – Synthèse : la propriété minimax de Tchebychev

On note T_n le n-ième polynôme de Tchebychev ($T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, coefficient dominant 2^{n-1}) et $\|P\| = \sup_{[-1,1]} |P|$.

a) Montrer que $\widetilde{T}_n = 2^{1-n} T_n$ est unitaire, que $\|\widetilde{T}_n\| = 2^{1-n}$, et que $\widetilde{T}_n(y_k) = (-1)^k 2^{1-n}$ pour $y_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Soit P unitaire de degré n avec $\|P\| < 2^{1-n}$. Étudier le signe de $Q = \widetilde{T}_n - P$ aux points y_k, et aboutir à une contradiction.

c) Conclure. Application : pour $n = 2$, quel est le polynôme unitaire de degré 2 le plus « petit » sur $[-1, 1]$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).