Plaquette 4 – Diagonalisabilité : critères, paramètres et endomorphismes d'espaces de matrices

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critères de diagonalisabilité.

— u diagonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour tout $\lambda \Leftrightarrow$

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}u} \dim E_\lambda = \dim E$$

— $\Leftrightarrow u$ annule un polynôme scindé à racines simples $\Leftrightarrow \pi_u$ scindé à racines simples.

— n valeurs propres distinctes en dimension $n \Rightarrow$ diagonalisable (condition suffisante seulement).

— Un nilpotent diagonalisable est nul ; un diagonalisable à une seule valeur propre est scalaire.

— Si u est diagonalisable, tout polynôme en u l'est, et l'induit sur un stable l'est aussi.

— **Rang 1** : $A = UV^{\mathsf{T}}$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}A \neq 0$.

Correction de l'exercice 1 – L'endomorphisme M ↦ M + tr(M) I

a) Pour $M \in H$, $\varphi(M) = M$. Et $\varphi(I_n) = I_n + nI_n = (n+1)I_n$.

b) $M_n = H \oplus \mathbb{R}I_n$ ($I_n \notin H$ car $\mathrm{tr}I_n = n \neq 0$). Dans une base adaptée, φ est diagonale :

$$\mathrm{Sp}\varphi = \{1, n+1\}, \qquad E_1 = H, \qquad E_{n+1} = \mathbb{R}I_n$$

c) $\det\varphi = 1^{n^2-1}(n+1) = n+1$. On cherche $\varphi^{-1}(N) = N + \alpha\mathrm{tr}(N)I_n$:
$\varphi(N + \alpha\mathrm{tr}(N)I) = N + \mathrm{tr}(N)(\alpha + 1 + n\alpha)I = N$ si $\alpha = -\frac{1}{n+1}$. Donc $\varphi^{-1}(N) = N - \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}I_n$.

Réponse. $\mathrm{Sp}\varphi = \{1, n+1\}$, $E_1 = H$, $E_{n+1} = \mathbb{R}I$; $\det\varphi = n+1$; $\varphi^{-1}(N) = N - \frac{\mathrm{tr}N}{n+1}I$.

Correction de l'exercice 2 – L'endomorphisme M ↦ tr(M) A - tr(A) M

a) $\psi(A) = \mathrm{tr}(A)A - \mathrm{tr}(A)A = 0$. Pour $\mathrm{tr}M = 0$: $\psi(M) = -\mathrm{tr}(A)M$.

b) $A \notin H$ (trace non nulle), donc $M_n = H \oplus \mathbb{R}A$, deux sous-espaces propres :

$$\ker\psi = \mathbb{R}A, \qquad E_{-\mathrm{tr}A} = H$$

— ψ est diagonalisable, de valeurs propres 0 (simple) et $-\mathrm{tr}A$ (multiplicité n^2-1).

c) Alors $\psi(M) = \mathrm{tr}(M)A$, de rang 1, et $\psi^2(M) = \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A = 0$: ψ est nilpotent non nul, donc non diagonalisable.

Réponse. $\ker\psi = \mathbb{R}A$, $E_{-\mathrm{tr}A} = H$; diagonalisable si $\mathrm{tr}A \neq 0$, nilpotent non nul sinon.

Correction de l'exercice 3 – L'endomorphisme P ↦ P(1 - X)

a) $s(s(P)) = P(1-(1-X)) = P$: $s^2 = \mathrm{id}$, et $X^2 - 1$ est scindé à racines simples.

b) $s\left((X-\frac{1}{2})^k\right) = \left(\frac{1}{2} - X\right)^k = (-1)^k\left(X - \frac{1}{2}\right)^k$. La famille est échelonnée en degré, c'est une base ; les valeurs propres sont 1 (k pair) et -1 (k impair).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour $n = 4$: $k \in \{0, 2, 4\}$ donne $\dim E_1 = 3$, $k \in \{1, 3\}$ donne $\dim E_{-1} = 2$. Ainsi

$$\operatorname{tr} s = 3 - 2 = 1, \qquad \det s = (-1)^2 = 1$$

— E_1 : polynômes symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$; E_{-1} : antisymétriques.

Réponse. $s^2 = \mathrm{id}$; base propre $(X - \frac{1}{2})^k$; pour $n = 4$: $\dim E_1 = 3$, $\dim E_{-1} = 2$, $\operatorname{tr} s = 1$, $\det s = 1$.

Correction de l'exercice 4 – L'opérateur de Volterra n'a pas de valeur propre

a) $V(f) = 0$ donne, en dérivant (théorème fondamental), $f = 0$.

b) g est C^1 avec $g' = f$ et $g(0) = 0$. L'égalité $g = \lambda f = \lambda g'$ donne $g' = \frac{1}{\lambda} g$, d'où

$$g(x) = g(0)\, e^{x/\lambda} = 0$$

— donc $f = \frac{1}{\lambda} g = 0$: λ n'est pas valeur propre.

c) V n'a **aucune** valeur propre. En dimension finie sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme en a au moins une (χ_u a une racine) ; en dimension infinie, ce n'est plus vrai.

Réponse. $\mathrm{Sp} V = \varnothing$: $g = \lambda g'$ et $g(0) = 0$ imposent $g = 0$.

Correction de l'exercice 5 – L'endomorphisme P ↦ (X - a)P'

a) $u((X-a)^k) = (X-a) \cdot k(X-a)^{k-1} = k(X-a)^k$.

b) Base propre $((X-a)^k)_{0 \le k \le n}$, valeurs propres $0, 1, \ldots, n$ (distinctes), $E_k = \mathbb{R}(X-a)^k$.

c) Avec $P = \sum c_k (X-a)^k$: $u(P) - 2P = \sum (k-2) c_k (X-a)^k = (X-a)^3$ donne $c_3 = 1$, c_2 libre, les autres nuls :

$$P = (X-a)^3 + \lambda (X-a)^2$$

— Pour $u(P) - 3P$: le coefficient de $(X-a)^3$ dans le membre de gauche est $(3-3)c_3 = 0 \neq 1$: **pas de solution**, car $(X-a)^3 \notin \mathrm{Im}(u - 3\,\mathrm{id})$.

Réponse. Valeurs propres $0, \ldots, n$, $E_k = \mathbb{R}(X-a)^k$; $P = (X-a)^3 + \lambda(X-a)^2$; pas de solution pour $u - 3\,\mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 6 – Une matrice par blocs

a) $M\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2AX \\ 2AX \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = 0$.

b) Avec $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$ (inversible, $P^2 = 2I_{2n}$), a) donne $MP = P\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\chi_M = \chi_{2A} \cdot X^n$$

c) M est diagonalisable $\Leftrightarrow \mathrm{diag}(2A, 0_n)$ l'est $\Leftrightarrow 2A$ l'est (le bloc nul l'est toujours, et un endomorphisme diagonal par blocs est diagonalisable si et seulement si chaque bloc l'est, par le polynôme minimal ppcm) $\Leftrightarrow A$ l'est.

Réponse. $M \sim \mathrm{diag}(2A, 0)$, $\chi_M = X^n \chi_{2A}$; diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable.

Correction de l'exercice 7 – Discussion selon un paramètre

a) Matrice triangulaire : $\chi = (X-1)^2(X-2)$, 1 double et 2 simple.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $A_a - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $a \neq 0$, les colonnes 2 et 3 sont libres : rang 2. Si $a = 0$, rang 1.

c) $\dim E_1 = 3 - \mathrm{rg}(A_a - I)$ doit valoir 2 :

$$A_a \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow a = 0$$

— Pour $a = 0$: $E_1 = \{z = 0\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, et $E_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} A_0 P = \mathrm{diag}(1, 1, 2)$.

Réponse. Spectre $\{1, 1, 2\}$; diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Correction de l'exercice 8 – Diagonalisabilité d'une matrice de rang 1

a) Les colonnes sont proportionnelles à une colonne non nulle U : $C_j = v_j U$, d'où $A = UV^{\mathsf{T}}$. Alors $A^2 = U(V^{\mathsf{T}}U)V^{\mathsf{T}} = (V^{\mathsf{T}}U)A$ et $V^{\mathsf{T}}U = \mathrm{tr}(UV^{\mathsf{T}})$.

b) Si $\mathrm{tr}A \neq 0$, $X(X - \mathrm{tr}A)$ est scindé à racines simples et annule A : diagonalisable. Si $\mathrm{tr}A = 0$, $A^2 = 0$ avec $A \neq 0$: nilpotent non nul, non diagonalisable.

c) $\mathrm{tr}A = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$: diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(1, 0, 0)$. $\mathrm{tr}B = 1 - 1 + 0 = 0$:

$$B^2 = 0, \quad B \neq 0$$

— B n'est pas diagonalisable.

Réponse. $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$; diagonalisable $\Leftrightarrow \mathrm{tr}A \neq 0$; A oui, B non.

Correction de l'exercice 9 – A et 2A semblables

a) $\mathrm{Sp}(2A) = 2\mathrm{Sp}A$ et des matrices semblables ont même spectre : $\mathrm{Sp}A = 2\mathrm{Sp}A$, puis par récurrence $2^k \lambda \in \mathrm{Sp}A$.

b) Si $\lambda \neq 0$, les $2^k \lambda$ sont deux à deux distincts : une infinité de valeurs propres, impossible. Donc $\mathrm{Sp}A = \{0\}$, $\chi_A = X^n$ et $A^n = 0$.

c) Avec $P = \mathrm{diag}(1, 2)$: multiplier à gauche par P^{-1} divise la deuxième ligne par 2 (elle est nulle), multiplier à droite par P double la deuxième colonne. Donc $N \sim 2N$. Une matrice diagonalisable nilpotente est nulle : il n'existe pas de solution diagonalisable non nulle.

$$\mathrm{diag}(1, 2)^{-1} N \,\mathrm{diag}(1, 2) = 2N$$

Réponse. $\mathrm{Sp}A = 2\mathrm{Sp}A$ fini $\Rightarrow \mathrm{Sp}A = \{0\}$, A nilpotente ; $N \sim 2N$ via $\mathrm{diag}(1, 2)$.

Correction de l'exercice 10 – Matrices d'ordre fini

a) $X^k - 1 = \prod_{j=0}^{k-1} (X - \mathrm{e}^{2ij\pi/k})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et annule A.

b) $\mathrm{tr}A = \sum \omega_i$ avec $|\omega_i| = 1$, donc $|\mathrm{tr}A| \leq n$. Égalité dans l'inégalité triangulaire : tous les ω_i sont égaux à un même ω. A diagonalisable avec une seule valeur propre est scalaire :

$$A = \omega I_n$$

c) Si $\mathrm{tr}A = n$, alors $\sum \omega_i = n$ avec $|\omega_i| = 1$: égalité, et $n\omega = n$ donne $\omega = 1$. Sur $\mathbb{R}$, non : la rotation $R_{2\pi/3}$ vérifie $R^3 = I_2$ sans valeur propre réelle.

Réponse. Diagonalisable sur $\mathbb{C}$; $|\mathrm{tr}A| \leq n$ avec égalité ssi $A = \omega I$; faux sur $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – La matrice antidiagonale

a) K renverse l'ordre des coordonnées : $K(x_1,\dots,x_n)=(x_n,\dots,x_1)$. Donc $K^2=I$, et X^2-1 est scindé à racines simples.

b) E_1 : vecteurs « palindromes » ($x_i=x_{n+1-i}$) ; E_{-1} : vecteurs « antipalindromes ». Si $n=2m$, $\dim E_1=\dim E_{-1}=m$. Si $n=2m+1$, la coordonnée centrale est libre dans E_1 et nulle dans E_{-1} :

$$\dim E_1=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\qquad \dim E_{-1}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

c) $\operatorname{tr}K=\lceil\frac{n}{2}\rceil-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, soit 0 si n pair et 1 si n impair (c'est le coefficient central).
$\det K=(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}$.

Réponse. $K^2=I$; $\dim E_1=\lceil\frac{n}{2}\rceil$, $\dim E_{-1}=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $\det K=(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}$.

Correction de l'exercice 12 – Matrices circulantes : diagonalisation commune

a) $P^n=I$: X^n-1 est scindé à racines simples, P est diagonalisable. La j-ième coordonnée de PF_k est la $(j+1)$-ième de F_k : $PF_k=\omega^k F_k$. Les n valeurs propres ω^k sont distinctes.

b) $CF_k=Q(P)F_k=Q(\omega^k)F_k$: la base (F_k) (base de Fourier) diagonalise toutes les circulantes à la fois.

c) $\det C$ est le produit des valeurs propres. Pour $n=2$: $\omega=-1$,

$$\det\begin{pmatrix}c_0 & c_1\\ c_1 & c_0\end{pmatrix}=(c_0+c_1)(c_0-c_1)=c_0^2-c_1^2$$

— ce que confirme le calcul direct.

Réponse. Base de Fourier commune ; valeurs propres $Q(\omega^k)$; $\det C=\prod Q(\omega^k)$.

Correction de l'exercice 13 – Une matrice nilpotente diagonalisable est nulle

a) Seule valeur propre 0 ; diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc nulle.

b) $A(AX)=0$: $\operatorname{Im}A\subset\ker A$. D'où $\operatorname{rg}A\le\dim\ker A=n-\operatorname{rg}A$:

$$\operatorname{rg}A\le\frac{n}{2}$$

c) $A=E_{12}+E_{34}$ (blocs $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ sur la diagonale) :
$A^2=E_{12}E_{12}+E_{12}E_{34}+E_{34}E_{12}+E_{34}E_{34}=0$ et $\operatorname{rg}A=2$.

Réponse. Nilpotente diagonalisable $\Rightarrow$ nulle ; $A^2=0\Rightarrow\operatorname{rg}A\le\frac{n}{2}$; exemple $E_{12}+E_{34}$.

Correction de l'exercice 14 – Diagonalisation et polynôme en A

a) $A=SDS^{-1}$ donne $P(A)=SP(D)S^{-1}$, avec $P(D)$ diagonale.

b) Non : $A^2=0$ est diagonalisable mais A ne l'est pas.

c) $Q(A)=\prod_\mu(P(A)-\mu I)=\pi_{P(A)}(P(A))=0$ puisque $P(A)$ est diagonalisable. Les racines de Q sont les z tels que $P(z)=\mu\in\operatorname{Sp}P(A)$; une racine z de Q est multiple si et seulement si $P'(z)=0$ (les $P-\mu$ sont premiers entre eux deux à deux). Or $\pi_A\mid Q$, et les racines de π_A sont les valeurs propres de A, où $P'\neq 0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\pi_A \text{ est à racines simples}$$

— donc A est diagonalisable. (Dans b), $P' = 2X$ s'annule en la valeur propre 0.)

Réponse. $P(A)$ diagonalisable si A l'est ; réciproque fausse ($A^2 = 0$) ; vraie si P' ne s'annule pas sur SpA.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : l'équation de Sylvester AM + MA = C

a) $DE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$ et $E_{ij}D = \lambda_j E_{ij}$, donc

$$\Psi(E_{ij}) = (\lambda_i + \lambda_j)E_{ij}$$

— Pour $A = SDS^{-1}$, la conjugaison $M \mapsto SMS^{-1}$ transporte la base propre (E_{ij}) en une base propre de Ψ.

b) Ψ est bijective si et seulement si 0 n'est pas valeur propre, c'est-à-dire $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ pour tous i, j (en particulier $\lambda_i \neq 0$).

c) Valeurs propres $2, 3, 3, 4$: pas de valeur nulle, solution unique. Coefficient par coefficient, $m_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}$: $m_{11} = \frac{4}{2} = 2$, $m_{12} = \frac{6}{3} = 2$, $m_{21} = 0$, $m_{22} = \frac{8}{4} = 2$. Donc $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérification : $AM = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $MA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, somme $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ✓.

Réponse. Valeurs propres $\lambda_i + \lambda_j$; unicité ssi $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$; $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).