Plaquette 2 – Polynôme caractéristique : calculs, propriétés, localisation du spectre

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés à connaître.

— $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$, et le coefficient de X^{n-2} vaut

$$\frac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{2}$$

— Blocs triangulaires : $\chi\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \chi_A \chi_C$.

— $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour A, B carrées ; pour $A \in M_{n,p}$, $B \in M_{p,n}$: $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.

— **Gershgorin** : toute valeur propre de A appartient à l'un des disques $D(a_{ii}, R_i)$, $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

— $GL_n(\mathrm{K})$ est **dense** dans $M_n(\mathrm{K})$: $A + \frac{1}{p} I$ est inversible pour p assez grand.

Correction de l'exercice 1 – Le coefficient de X^{n-2} du polynôme caractéristique

a) $\chi_A = \prod (X - \lambda_i)$: $c_{n-2} = \sigma_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$.

b) $\left(\sum \lambda_i\right)^2 = \sum \lambda_i^2 + 2\sigma_2$; or $\sum \lambda_i = \mathrm{tr}A$ et $\sum \lambda_i^2 = \mathrm{tr}(A^2)$ (les valeurs propres de A^2 sont les λ_i^2, par trigonalisation). D'où

$$c_{n-2} = \frac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{2}$$

c) $\mathrm{tr}A = 5$, $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}A^2 = 29$, et $\frac{25 - 29}{2} = -2 = \det A$ ✓ (en taille 2, $c_0 = \det A$).

Pour B : $c_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1$, donc $\chi_B = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-1)(X+1)(X-2)$.

Réponse. $c_{n-2} = \sigma_2 = \frac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2}{2}$; $\chi_B = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Correction de l'exercice 2 – Matrices triangulaires par blocs

a) $XI - M = \begin{pmatrix} XI_p - A & -B \\ 0 & XI_q - C \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs ; le déterminant d'une telle matrice est le produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\chi_M = \det(XI_p - A)\det(XI_q - C) = \chi_A \chi_C$$

b) $\chi_A = (X-1)^2 - 4 = (X-3)(X+1)$ et $\chi_C = X^2 + 1$. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} M = \{3, -1, i, -i\}$, et seules 3 et -1 sont réelles.

c) Non : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a des blocs $A = C = (0)$, mais $\chi = X^2 - 1 \neq X^2$.

Réponse. $\chi_M = \chi_A \chi_C$; spectre $\{3, -1, i, -i\}$; faux pour des blocs pleins.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Spectre de aI + bJ

a) $\mathrm{rg} J = 1$, donc $\dim\ker J = n-1$ ($\ker J$: vecteurs de somme des coordonnées nulle). Et $J\mathbf{1} = n\mathbf{1}$ avec $\mathbf{1} = (1,\dots,1)$.

b) J est diagonalisable : 0 (multiplicité $n-1$) et n (simple), $\chi_J = X^{n-1}(X-n)$. Les vecteurs propres de J sont ceux de M, de valeurs propres a et $a+nb$:

$$\chi_M = (X-a)^{n-1}(X-a-nb), \qquad \det M = a^{n-1}(a+nb)$$

c) $a=1$, $b=1$: $\det = 1^{n-1}(1+n) = n+1$. Pour $n=2$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ ✓.

Réponse. $\chi_M = (X-a)^{n-1}(X-a-nb)$; $\det M = a^{n-1}(a+nb)$; déterminant $n+1$.

Correction de l'exercice 4 – Matrices circulantes

a) P est la matrice d'une permutation circulaire : $P^3 = I$, et $\chi_P = X^3 - 1$ (matrice compagnon). Pour $\omega \in \{1, j, j^2\}$, $X_\omega = (1, \omega, \omega^2)$ vérifie $PX_\omega = (\omega, \omega^2, 1) = \omega X_\omega$.

b) $CX_\omega = (1 + 2\omega + 3\omega^2)X_\omega$. Avec $j^2 = -1 - j$ et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

— $\omega = 1$: 6 ;

— $\omega = j$: $1 + 2j + 3j^2 = -2 - j = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

— $\omega = j^2$: le conjugué $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\mathrm{tr} C = 6 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3$ ✓ et

$$\det C = 6 - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}^2 = 6\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) = 18$$

— ce que confirme la règle de Sarrus : $1 + 8 + 27 - 3 \times 6 = 18$.

Réponse. Valeurs propres 6 et $-\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\det C = 18$, $\mathrm{tr} C = 3$.

Correction de l'exercice 5 – Une matrice tridiagonale

a) Développement selon la première ligne de $xI - A_{n+2}$: $(x-2)D_{n+1}$ moins $(-1)\times(-1)\times D_n$ (le cofacteur se développe à nouveau selon sa première colonne) :

$$D_{n+2} = (x-2)D_{n+1} - D_n$$

b) $D_2 = (x-2)^2 - 1$, $D_3 = (x-2)((x-2)^2 - 1) - (x-2) = (x-2)((x-2)^2 - 2)$. Valeurs propres : 2, $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$.

c) La suite $s_n = (-1)^n \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ vérifie $s_0 = 1$, $s_1 = -2\cos\theta = x-2$, et $s_{n+2} = -2\cos\theta\, s_{n+1} - s_n$ (formule $\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2\cos\theta\sin((n+2)\theta)$). Donc $D_n = s_n$, qui s'annule pour $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,\dots,n$: n valeurs distinctes $2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$. Pour $n=3$: $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$ ✓.

Réponse. $D_3 = (x-2)((x-2)^2 - 2)$; $\mathrm{Sp} A_n = \left\langle 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 6 – Même polynôme caractéristique, non semblables

a) $\chi = (X-1)^2$ pour les deux. Une matrice semblable à I_2 est $PIP^{-1} = I_2$; or $N \neq I_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$: même trace 0, même déterminant 0, polynômes minimaux X et X^2 différents, donc non semblables.

c) Pour A non scalaire de taille 2, il existe x non vecteur propre ; alors (x, Ax) est une base, et $A^2x = \operatorname{tr}(A)Ax - \det(A)x$ (Cayley-Hamilton). Dans cette base, A a pour matrice la matrice compagnon de χ_A :

$$\begin{pmatrix}0&-\det A\\1&\operatorname{tr}A\end{pmatrix}$$

— Deux matrices non scalaires de même χ sont semblables à la même matrice compagnon.

Réponse. I_2 et N : même χ, non semblables ; en taille 2, non scalaires et même $\chi \Rightarrow$ semblables (forme compagnon).

Correction de l'exercice 7 – Valeur propre réelle en dimension impaire

a) χ_A est réel de degré impair, de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $\mp\infty$: le TVI fournit une racine réelle.

b) $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A < 0$, et $\chi_A(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Le TVI sur $[0, +\infty[$ donne $\lambda > 0$ avec

$$\chi_A(\lambda) = 0$$

c) Un vecteur propre réel engendre une droite stable. Pour une rotation R : les valeurs propres réelles d'une isométrie sont ± 1, et $\det R = 1 > 0$ donne une valeur propre réelle > 0, donc égale à 1 : il existe $x \neq 0$ avec $Rx = x$, d'où l'axe $\mathbb{R}x$.

Réponse. Valeur propre réelle par le TVI ; $\chi_A(0) = -\det A < 0$ donne $\lambda > 0$; axe des rotations de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 8 – Disques de Gershgorin

a) La ligne i de $AX = \lambda X$ donne $(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$, et $x_i \neq 0$. En divisant :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq R_i$$

b) Disques (ici intervalles) : $[4, 6]$, $[-5, -1]$, $[8, 10]$. Ils sont disjoints ; on admet qu'alors chacun contient exactement une valeur propre (argument de continuité en $t \mapsto D + t(A - D)$). Les valeurs propres sont environ 5,12, −3,20 et 9,08.

c) 0 n'est dans aucun disque : A est inversible. Le produit des valeurs propres a le signe de $(+)(-)(+)$: $\det A < 0$. Vérification : $\det A = 5(-27 - 1) - 1(9 - 0) = -140 - 9 = -149$ ✓.

Réponse. $|\lambda - a_{ii}| \leq R_i$; valeurs propres dans $[4, 6]$, $[-5, -1]$, $[8, 10]$; $\det A = -149 < 0$.

Correction de l'exercice 9 – Matrices à diagonale strictement dominante

a) Si 0 était valeur propre, Gershgorin donnerait un i avec $|0 - a_{ii}| \leq R_i$, ce qui contredit $|a_{ii}| > R_i$.

b) Une valeur propre réelle λ vérifie $|\lambda - a_{ii}| \leq R_i < a_{ii}$ pour un i, d'où $\lambda > a_{ii} - R_i > 0$. Les valeurs propres non réelles vont par paires conjuguées, de produit $|\mu|^2 > 0$:

$$\det A = \prod \lambda_k > 0$$

c) Non : pour les lignes intérieures, $|2| = |-1| + |-1|$, il n'y a pas d'inégalité stricte. Le critère est suffisant mais pas nécessaire (A_n est pourtant inversible, ses valeurs propres

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$2-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ étant non nulles).

Réponse. Inversible par Gershgorin ; valeurs propres réelles >0 et $\det A>0$; A_n n'est pas strictement dominante.

Correction de l'exercice 10 – Densité des matrices inversibles

a) $\det\left(A-\frac{1}{p}I\right)=(-1)^n\chi_A\left(\frac{1}{p}\right)$; χ_A n'a qu'un nombre fini de racines, donc $\frac{1}{p}$ n'en est pas une pour p assez grand. La suite $A-\frac{1}{p}I$ de matrices inversibles tend vers A.

b) $BA=A^{-1}(AB)A$: AB et BA sont semblables, donc

$$\chi_{BA}=\chi_{A^{-1}(AB)A}=\chi_{AB}$$

c) Pour x fixé, $A\mapsto\det(xI-AB)-\det(xI-BA)$ est continue (polynomiale en les coefficients) et nulle sur la partie dense GL_n : elle est nulle partout. Ainsi $\chi_{AB}(x)=\chi_{BA}(x)$ pour tout x.

Réponse. GL_n dense ; $\chi_{AB}=\chi_{BA}$ par similitude puis par densité.

Correction de l'exercice 11 – Vecteurs propres à gauche et à droite

a) $Y^{\mathsf T}(AX)=\lambda Y^{\mathsf T}X$ et $(Y^{\mathsf T}A)X=(A^{\mathsf T}Y)^{\mathsf T}X=\mu Y^{\mathsf T}X$. Donc $(\lambda-\mu)Y^{\mathsf T}X=0$, et comme $\lambda\neq\mu$:

$$Y^{\mathsf T}X=0$$

b) Pour A : $E_1=\mathrm{Vect}(1,0)$, $E_2=\mathrm{Vect}(1,1)$. Pour $A^{\mathsf T}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$: $E_1=\mathrm{Vect}(1,-1)$, $E_2=\mathrm{Vect}(0,1)$. On a bien $(0,1)\cdot(1,0)=0$ ($\mu=2$, $\lambda=1$) et $(1,-1)\cdot(1,1)=0$ ($\mu=1$, $\lambda=2$).

c) Non (exemple ci-dessus) : A et $A^{\mathsf T}$ ont le même spectre mais pas les mêmes vecteurs propres, sauf par exemple si A est symétrique.

Réponse. $Y^{\mathsf T}X=0$; vecteurs propres de A et $A^{\mathsf T}$ différents en général.

Correction de l'exercice 12 – Matrices de permutation

a) $\sigma\mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes, donc $P_\sigma^k=P_{\sigma^k}$ et $P_\sigma^m=I$ si m est l'ordre de σ. Les valeurs propres vérifient $\lambda^m=1$.

b) Dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4), P_σ est diagonale par blocs : un bloc 3×3 de permutation circulaire et un bloc (1). Donc

$$\chi_{P_\sigma}=(X^3-1)(X-1)$$

c) On découpe $\{1,\dots,n\}$ en orbites de σ : chaque cycle de longueur ℓ donne un bloc de permutation circulaire de taille ℓ, de polynôme caractéristique $X^\ell-1$. Par le calcul par blocs, $\chi_{P_\sigma}=\prod_c(X^{\ell(c)}-1)$.

Réponse. Valeurs propres racines de l'unité ; $(X^3-1)(X-1)$; $\chi_{P_\sigma}=\prod_c(X^{\ell(c)}-1)$.

Correction de l'exercice 13 – L'endomorphisme M ↦ AM - MA

a) $AE_{ij}=\lambda_iE_{ij}$ et $E_{ij}A=\lambda_jE_{ij}$, donc

$$\Phi_A(E_{ij})=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}$$

b) Si $A=PDP^{-1}$, l'application $M\mapsto P^{-1}MP$ conjugue Φ_A à Φ_D. Les $PE_{ij}P^{-1}$ forment une base de vecteurs propres de Φ_A, de valeurs propres $\lambda_i-\lambda_j$.

c) $\Phi_A(I)=0$: Φ_A n'est pas injectif. Si les λ_i sont distincts, $\lambda_i-\lambda_j=0\Leftrightarrow i=j$, d'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\dim\ker\Phi_A = n$: le commutant de A est formé des matrices diagonales dans la même base (c'est $\mathbb{C}[A]$).

Réponse. $\Phi_D(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$; Φ_A diagonalisable ; $\dim\ker\Phi_A = n$ si valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 14 – Matrice de rang 1 et formule du déterminant

a) UV^{T} est de rang 1 : 0 est valeur propre de multiplicité géométrique $n-1$, donc d'ordre $\geq n-1$ dans χ. La dernière valeur propre est la trace $\mathrm{tr}(UV^{\mathsf{T}}) = V^{\mathsf{T}}U$:

$$\chi_{UV^{\mathsf{T}}} = X^{n-1}(X - V^{\mathsf{T}}U)$$

b) Les valeurs propres de $I + UV^{\mathsf{T}}$ sont 1 ($n-1$ fois) et $1 + V^{\mathsf{T}}U$; le déterminant est leur produit.

c) $V^{\mathsf{T}}U = 6$, donc $\det M = 7$. Directement, $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et
$\det M = 2(12-6) - 1(8-6) + 1(6-9) = 12 - 2 - 3 = 7$ ✓.

Réponse. $\chi_{UV^{\mathsf{T}}} = X^{n-1}(X - V^{\mathsf{T}}U)$; $\det(I + UV^{\mathsf{T}}) = 1 + V^{\mathsf{T}}U$; ici 7.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : AB et BA rectangulaires

a) Par blocs :

$$MN = \begin{pmatrix} XI_n & 0 \\ B & XI_p - BA \end{pmatrix}, \qquad NM = \begin{pmatrix} XI_n - AB & 0 \\ XB & XI_p \end{pmatrix}$$

— (dans MN, le bloc supérieur droit vaut $-XA + XA = 0$; dans NM, $A - A = 0$).

b) Avec $\Delta = \det M$ et $\det N = X^p$, les déterminants des matrices triangulaires par blocs donnent $X^p\Delta = X^n\chi_{BA}$ (pour MN) et $X^p\Delta = \chi_{AB}X^p$ (pour NM), d'où $\Delta = \chi_{AB}$ et

$$X^p\chi_{AB} = X^n\chi_{BA}$$

c) Les racines non nulles des deux membres et leurs multiplicités coïncident. Ici $BA = (3+8) = (11)$, $\chi_{BA} = X - 11$, donc $\chi_{AB} = X(X-11)$: $\mathrm{Sp}(AB) = \{0, 11\}$, avec $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ (trace 11, déterminant 0 ✓).

Réponse. $X^p\chi_{AB} = X^n\chi_{BA}$; mêmes valeurs propres non nulles ; $\mathrm{Sp}(AB) = \{0, 11\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).