Plaquette 5 – Réduction appliquée : suites, chaînes de Markov, graphes, systèmes différentiels

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Systèmes linéaires.

— Si $A = PDP^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$: $A^n = PD^nP^{-1}$ et, pour $X' = AX$,

$$X(t) = P\,\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_i t}\right)P^{-1}X(0) = \sum_i c_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}V_i$$

— $A^n \to 0$ si toutes les valeurs propres sont de module < 1 (cas diagonalisable).

— **Markov** : matrice stochastique P (lignes de somme 1), loi $\mu_{n+1} = \mu_n P$ (ligne). Loi stationnaire : $\mu P = \mu$.

— **Graphe** : $(A^n)_{ij}$ = nombre de chemins de longueur n de i à j.

— Point fixe de $X_{n+1} = AX_n + B$: $L = (I - A)^{-1}B$ si $1 \notin \mathrm{Sp}A$, et $X_n - L = A^n(X_0 - L)$.

Correction de l'exercice 1 – Fibonacci et nombre d'or

a) Vrai pour $n = 1$ ($F_2 = 1$, $F_0 = 0$). Hérédité : $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ ✓.

b) $\chi_A = X^2 - X - 1$, racines $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, distinctes. On écrit $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n$; $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donnent $\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

c) $|\psi| < 1 < \varphi$, donc $F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ et $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$. Cassini : $\det A^n = (\det A)^n = (-1)^n$ et $\det A^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.

Réponse. $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$; $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$; $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Correction de l'exercice 2 – Chaîne de Markov à deux états

a) $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ (somme des lignes égale à 1) : 1 est valeur propre ; l'autre vaut $\mathrm{tr}P - 1 = 1 - a - b = 0{,}5$.

b) $\mu P = \mu$ équivaut à $-a\mu_1 + b\mu_2 = 0$, donc μ proportionnel à (b, a) :

$$\mu = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right) = (0{,}6;\ 0{,}4)$$

c) P est diagonalisable (valeurs propres distinctes) : $P^n = \Pi + (0{,}5)^nR$ où Π est le projecteur sur E_1 parallèlement à $E_{0,5}$. Comme $\Pi\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $\mu\Pi = \mu$, on obtient $\Pi = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$. La convergence est géométrique, de raison $|1 - a - b| = 0{,}5$.

Réponse. $\mathrm{Sp}P = \{1;\ 0{,}5\}$; $\mu = (0{,}6;\ 0{,}4)$; convergence en $0{,}5^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Modèle de population de Leslie

a) $\chi_L = X^2 - X - \frac{3}{4} = \left(X - \frac{3}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. Valeurs propres $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

b) $L - \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, de noyau Vect$(3,1)$. Vérification : $L(3,1) = (3 + 1{,}5;\ 1{,}5) = \frac{3}{2}(3,1)$ ✓.

c) $X_0 = c_1(3,1) + c_2 V_2$, d’où $X_n = c_1\left(\frac{3}{2}\right)^n (3,1) + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n V_2$. Si $c_1 \neq 0$:

$$X_n \sim c_1\left(\frac{3}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— La population croît de 50 % par génération et la structure se stabilise à 75 % de jeunes et 25 % d’adultes.

Réponse. Valeurs propres $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$; vecteur stable $(3,1)$; croissance ×1,5, répartition 3:1.

Correction de l’exercice 4 – Un système différentiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2 - 4 = (X-3)(X+1)$. Vecteurs propres $(1,1)$ pour 3 et $(1,-1)$ pour -1.

b) On pose $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ (coordonnées dans la base propre) : $u' = 3u$, $v' = -v$, $u(0) = v(0) = \frac{1}{2}$. Donc

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad y(t) = \frac{\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

— Vérification : $x' = \frac{3\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$ et $x + 2y = \frac{3\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$ ✓.

c) $x(t) \sim y(t) \sim \frac{\mathrm{e}^{3t}}{2}$: la trajectoire s’aligne sur la direction propre $(1,1)$ de la valeur propre dominante.

Réponse. $x = \frac{\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}}{2}$, $y = \frac{\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

Correction de l’exercice 5 – Équation du second ordre et matrice compagnon

a) $y'' = 3y' - 2y$, donc $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\chi_C = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.

b) Vecteurs propres : $(1,1)$ pour 1, $(1,2)$ pour 2 (le vecteur propre d’une compagnon est $(1,\lambda)$). Ainsi $Y = c_1\mathrm{e}^{t}(1,1) + c_2\mathrm{e}^{2t}(1,2)$ et

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{2t}$$

c) χ_C est exactement le polynôme caractéristique $r^2 - 3r + 2$ de l’équation : la méthode « $y = \mathrm{e}^{rt}$ » est la diagonalisation de la matrice compagnon.

Réponse. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi_C = (X-1)(X-2)$; $y = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{2t}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Chemins dans un graphe

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par exemple $(A^2)_{22} = 2$: de 2, on peut aller en 1 ou en 3 et revenir. $(A^2)_{13} = 1$: le chemin $1 \to 2 \to 3$.

b) $A^2 e_2 = 2e_2$, donc $A^{2k} e_2 = 2^k e_2$ et

$$(A^{2k})_{22} = 2^k$$

— (à chaque aller-retour, deux choix : vers 1 ou vers 3).

c) $\chi_A = X^3 - 2X = X(X^2 - 2)$: $\mathrm{Sp}A = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Symétrique par rapport à 0, comme pour tout graphe biparti.

Réponse. $(A^{2k})_{22} = 2^k$; $\mathrm{Sp}A = \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Correction de l'exercice 7 – Suites couplées non diagonalisables

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, seule valeur propre 2 ; $A \neq 2I$: non diagonalisable.

b) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$, et $2I$ commute avec N :

$$A^n = 2^n I + n 2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c) $v_n = 2^n v_0$ et $u_n = 2^n u_0 + n 2^{n-1} v_0$. Vérification pour $n = 2$: $u_2 = 2(2u_0 + v_0) + 2v_0 = 4u_0 + 4v_0$ ✓. Le facteur polynomial n apparaît à cause du bloc non diagonalisable (comme $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ pour une racine double d'une équation différentielle).

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$; $u_n = 2^n u_0 + n 2^{n-1} v_0$.

Correction de l'exercice 8 – Marche aléatoire sur un triangle

a) J a pour valeurs propres 3 (simple) et 0 (double) ; P a donc 1 et $-\frac{1}{2}$ (double), et est diagonalisable comme polynôme en J (symétrique réelle de surcroît).

b) $Q = \frac{1}{3}J$ est le projecteur sur $\mathbb{R}\mathbf{1}$ ($Q^2 = \frac{1}{9} \cdot 3J = Q$), et $I - Q$ le projecteur complémentaire. $P = \frac{1}{2}(3Q - I) = Q - \frac{1}{2}(I - Q)$, d'où, les projecteurs étant orthogonaux entre eux :

$$P^n = Q + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (I - Q)$$

c) Le coefficient diagonal vaut $\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{2}{3}$. Pour $n = 1$: 0 ✓ ; $n = 2$: $\frac{1}{2}$ ✓. La limite est $\frac{1}{3}$: la loi tend vers l'uniforme.

Réponse. $\mathrm{Sp}P = \{1, -\frac{1}{2}\}$; probabilité $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Convergence des puissances

a) $\mathrm{tr}A = 0{,}9$, $\det A = 0{,}2 - 0{,}06 = 0{,}14$: $\chi_A = X^2 - 0{,}9X + 0{,}14 = (X - 0{,}7)(X - 0{,}2)$.

b) $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0{,}7;\ 0{,}2)$: $A^n = PD^nP^{-1} \to 0$. Et $(I - A)\sum_{k=0}^{n} A^k = I - A^{n+1} \to I$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$$

c) $I-A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, de déterminant $0{,}3 - 0{,}06 = 0{,}24$. Donc $(I-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}24}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}25 \\ \frac{5}{6} & \frac{25}{12} \end{pmatrix}$, à coefficients positifs.

Réponse. $\mathrm{Sp}A = \{0{,}7;\ 0{,}2\}$; $\sum A^n = (I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}25 \\ \frac{5}{6} & \frac{25}{12} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 – Racines carrées d'une matrice diagonale

a) $MD = MM^2 = M^3 = M^2M = DM$.

b) D a des valeurs propres distinctes : ses sous-espaces propres sont les droites $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_2$, stables par M qui commute avec D. Donc M est diagonale, $M = \mathrm{diag}(a, b)$ avec $a^2 = 1$ et $b^2 = 4$:

$$M = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 2)$$

— soit 4 solutions.

c) Le même raisonnement donne $M = \mathrm{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n})$: 2^n solutions. (Si une valeur propre est multiple, il y en a une infinité : par exemple toutes les symétries vérifient $M^2 = I$.)

Réponse. $M = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 2)$: 4 solutions ; 2^n en général.

Correction de l'exercice 11 – Exponentielle d'une matrice diagonalisable

a) $A^2 = I$, donc $A^{2k} = I$ et $A^{2k+1} = A$. En séparant les termes pairs et impairs :

$$\exp(tA) = \cosh(t)I + \sinh(t)A = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

b) Valeurs propres 1 et -1, vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,-1)$. Dans cette base, $\exp(tD) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$, et en revenant à la base canonique on retrouve $\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = \cosh t$ en diagonale, $\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = \sinh t$ hors diagonale.

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = \sinh(t)I + \cosh(t)A = A(\cosh(t)I + \sinh(t)A)$ (car $A^2 = I$), donc $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$.

Réponse. $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Oscillateurs couplés

a) $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\chi_K = (X+2)^2 - 1 = (X+1)(X+3)$. Vecteurs propres $(1,1)$ pour -1, $(1,-1)$ pour -3.

b) Avec $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$: $u'' = -u$ et $v'' = -3v$.

— Mode **en phase** ($x = y$) : pulsation 1.
— Mode **en opposition** ($x = -y$) : pulsation $\sqrt{3}$.

c) $u = a\cos t + b\sin t$, $v = c\cos\sqrt{3}t + d\sin\sqrt{3}t$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a\cos t + b\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(c\cos\sqrt{3}t + d\sin\sqrt{3}t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Réponse. Modes $(1,1)$ de pulsation 1 et $(1,-1)$ de pulsation $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 13 – Matrices 2 × 2 à coefficients strictement positifs

a) Le discriminant de $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ vaut

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc > 0$$

b) $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d > 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta} > 0$. Si $\lambda_2 \geq 0$, c'est clair ; si $\lambda_2 < 0$, alors $\lambda_1 > -\lambda_2$ car leur somme est positive.

c) $A - \lambda_1 I$ est de rang 1 (non inversible, et non nulle car $b > 0$) : son noyau est celui de sa première ligne $(a-\lambda_1,\, b)$, qui contient $(b,\, \lambda_1 - a)$ puisque $(a-\lambda_1)b + b(\lambda_1 - a) = 0$. Or $\lambda_1 - a = \frac{d-a+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ car $\sqrt{\Delta} > |a-d|$. Les deux coordonnées sont strictement positives.

Réponse. $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$; $\lambda_1 > |\lambda_2|$; vecteur propre $(b, \lambda_1 - a) > 0$.

Correction de l'exercice 14 – Point fixe d'une récurrence affine

a) $A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: valeurs propres $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$, soit $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$. 1 n'est pas valeur propre : $I - A$ est inversible.

b) $L = AL + B$: par symétrie $L = (\ell, \ell)$, avec $\ell = \frac{3}{4}\ell + 1$, d'où $\ell = 4$ et $L = (4,4)$. En soustrayant $L = AL + B$ à la récurrence :

$$X_{n+1} - L = A(X_n - L) \quad \Longrightarrow \quad X_n - L = A^n(X_0 - L)$$

c) Les valeurs propres de A sont de module < 1 : $A^n \to 0$ et $X_n \to L$. La convergence est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ (la plus grande valeur propre).

Réponse. $\mathrm{Sp}A = \{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\}$; $L = (4,4)$; $\|X_n - L\| = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : l'urne d'Ehrenfest à deux boules

a) De 0 on va en 1 ; de 2 on va en 1 ; de 1 on va en 0 ou 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\chi_P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ (trace 0, $\det P = 0$, et 1, -1 valeurs propres). Trois valeurs propres distinctes : diagonalisable. Loi stationnaire : $\mu_0 = \frac{\mu_1}{2}$, $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2}$, d'où $\mu = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (loi binomiale $B(2, \frac{1}{2})$).

c) $P^n = \Pi_1 + (-1)^n \Pi_{-1}$ (projecteurs spectraux) : la suite oscille et ne converge pas (la chaîne est périodique : la parité de X_n alterne). En revanche $\frac{1}{n}\sum_{k<n}(-1)^k \to 0$, donc la moyenne de Cesàro tend vers $\Pi_1 = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$: la proportion du temps passé dans chaque état tend vers μ.

Réponse. $\mathrm{Sp}P = \{1, 0, -1\}$; $\mu = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$; P^n diverge, sa moyenne de Cesàro tend vers

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Π_1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).