Plaquette 3 – Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Stabilité.

— Si u et v commutent, $\ker v$, $\mathrm{Im} v$ et les $\ker P(v)$ sont stables par u.

— F stable $\Leftrightarrow$ matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ dans une base adaptée ; A est la matrice de u_F et

$$\chi_u = \chi_{u_F}\chi_C, \qquad \pi_{u_F} \mid \pi_u$$

— Droite $\mathbb{K}x$ stable $\Leftrightarrow$ x vecteur propre.

— Hyperplan $\ker\varphi$ stable $\Leftrightarrow$ $\varphi \circ u = \lambda\varphi$; matriciellement, L ligne non nulle avec $LA = \lambda L$.

— Si $\pi_u = P_1 \cdots P_r$ (facteurs premiers entre eux) et F est stable, alors $F = \bigoplus_i (F \cap \ker P_i(u))$.

— **Noyaux itérés** : $(\ker u^k)$ croît puis stationne à partir d'un rang $r \leq n$, et $E = \ker u^r \oplus \mathrm{Im} u^r$ (Fitting).

Correction de l'exercice 1 – Endomorphismes qui commutent

a) Si $u(x) = 0$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = 0$. Si $y = u(x)$, alors $v(y) = u(v(x)) \in \mathrm{Im} u$.

b) On applique a) à $u - \lambda\,\mathrm{id}$, qui commute avec v :

$$\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) \text{ est stable par } v$$

c) $E = \bigoplus E_\lambda(u)$. Pour $x \in E_\lambda(u)$: $v(x) \in E_\lambda(u)$, donc $u(v(x)) = \lambda v(x) = v(\lambda x) = v(u(x))$. Les deux endomorphismes uv et vu coïncident sur chaque E_λ, donc sur E.

Réponse. $\ker u$, $\mathrm{Im} u$, $E_\lambda(u)$ stables par v ; réciproque vraie si u est diagonalisable.

Correction de l'exercice 2 – Matrice dans une base adaptée

a) $u(e_1) = e_1$: F stable. $u(e_2 + e_3) = (1+1, 2+1, 1+2) = (2,3,3) = 2e_1 + 3(e_2 + e_3) \in G$, et $u(e_1) \in G$: G stable.

b) Il reste $u(e_3) = (1,1,2) = e_1 + (e_2 + e_3) + e_3$. Dans la base (e_1, f_2, e_3) avec $f_2 = e_2 + e_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Matrice triangulaire : $\chi_A = (X-1)^2(X-3)$. Valeurs propres 1 (double) et 3 (simple). Contrôle : $\mathrm{tr} A = 5 = 1 + 1 + 3$ ✓.

Réponse. F et G stables ; matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\chi_A = (X-1)^2(X-3)$.

Correction de l'exercice 3 – Hyperplans stables et transposée

a) Si $LA = \lambda L$ et $LX = 0$, alors $L(AX) = \lambda LX = 0$: H stable. Réciproquement, si H est stable, la forme $X \mapsto LAX$ s'annule sur $H = \ker L$, donc lui est proportionnelle : $LA = \lambda L$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On cherche les vecteurs propres de $A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda = 1$: $A^{\mathsf{T}} - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de noyau $\mathrm{Vect}(0,1,0)$. Pour $\lambda = 2$: noyau $\mathrm{Vect}(0,0,1)$. D'où exactement deux plans stables :

$$\{y = 0\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_3), \qquad \{z = 0\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

— On vérifie : $Ae_1 = e_1$, $Ae_3 = 2e_3$, $Ae_2 = e_1 + e_2$.

Réponse. H stable $\Leftrightarrow$ L^{T} vecteur propre de A^{T} ; plans stables $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Correction de l'exercice 4 – Stables d'un endomorphisme à valeurs propres distinctes

a) $p_i = L_i(u)$ est le projecteur sur $\mathrm{K}e_i$ parallèlement aux autres droites propres ; c'est un polynôme en u, donc $p_i(F) \subset F$. Pour $x \in F$: $x = \sum p_i(x)$ avec $p_i(x) \in F \cap \mathrm{K}e_i$.

b) Chaque $F \cap \mathrm{K}e_i$ vaut $\{0\}$ ou $\mathrm{K}e_i$. Donc $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$; réciproquement ces sous-espaces sont stables. Il y en a autant que de parties de $[\![1, n]\!]$:

$$2^n \text{ sous-espaces stables}$$

c) Plans stables : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ (et $2^3 = 8$ stables au total).

Réponse. $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$; 2^n stables ; trois plans stables pour $\mathrm{diag}(1,2,3)$.

Correction de l'exercice 5 – Stables de la dérivation

a) F est stable par D, donc par ses itérées : $P^{(k)} \in F$. La famille est échelonnée en degré ($\deg P^{(k)} = d - k$), donc libre, de cardinal $d + 1 = \dim \mathrm{K}_d[X]$:

$$\mathrm{Vect}(P, P', \ldots, P^{(d)}) = \mathrm{K}_d[X] \subset F$$

b) Tout élément de F est de degré $\leq d$: $F \subset \mathrm{K}_d[X]$. D'où l'égalité.

c) Les stables sont $\{0\}$ et les $\mathrm{K}_d[X]$, $0 \leq d \leq n$: $n + 2$ sous-espaces, totalement ordonnés par inclusion. Un endomorphisme diagonalisable à valeurs propres distinctes en a 2^{n+1} en dimension $n + 1$: un nilpotent cyclique en a beaucoup moins.

Réponse. Stables : $\{0\}$ et les $\mathrm{K}_d[X]$; $n + 2$ au total.

Correction de l'exercice 6 – Stables d'une rotation du plan

a) $\chi = X^2 - 2\cos\theta X + 1$, de discriminant $4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$: aucune racine réelle.

b) Une droite stable serait engendrée par un vecteur propre réel : il n'y en a pas. Les seuls stables sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$.

c) Sur $\mathbb{C}$, les racines sont $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$, distinctes. Vecteurs propres :

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

— Les droites stables de $\mathbb{C}^2$ sont $\mathbb{C}(1, -i)$ et $\mathbb{C}(1, i)$. (Vérification de la première : $\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\sin\theta - i\cos\theta = -i\,\mathrm{e}^{i\theta}$.)

Réponse. Sur $\mathbb{R}^2$: seulement $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$; sur $\mathbb{C}^2$: droites $\mathbb{C}(1, \mp i)$.

Correction de l'exercice 7 – Polynôme caractéristique de l'induit

a) Matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A matrice de u_F : $\chi_u = \chi_A \chi_C$. Et $\pi_u(u) = 0$ implique $\pi_u(u_F) = 0$, d'où $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Un diviseur d'un polynôme scindé (respectivement scindé à racines simples) l'est aussi.

c) $u(x,y,z)=(y,z,x)$ conserve la somme des coordonnées : P est stable.
$\chi_u = X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ et $u_{\mathbb{R}(1,1,1)}=\mathrm{id}$, de polynôme caractéristique $X-1$.
Comme $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}(1,1,1)\oplus P$ avec deux stables :

$$\chi_{u_P}=\frac{X^3-1}{X-1}=X^2+X+1$$

— u_P est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ du plan P, sans valeur propre réelle.

Réponse. $\chi_{u_F}\mid\chi_u$, $\pi_{u_F}\mid\pi_u$; $\chi_{u_P}=X^2+X+1$.

Correction de l'exercice 8 – Supplémentaire stable

a) u_F est diagonalisable : soit $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F formée de vecteurs propres. On la complète en une base de E par des vecteurs d'une base propre de u (théorème de la base incomplète appliqué à une famille génératrice de vecteurs propres). Le sous-espace G engendré par les vecteurs ajoutés est stable (engendré par des vecteurs propres) et supplémentaire de F.

b) Les seules droites stables sont celles des vecteurs propres ; $\ker N=\mathrm{Vect}(e_1)$ est le seul sous-espace propre. Un supplémentaire stable de F serait une droite stable différente de F : impossible.

c) Soit F la somme des sous-espaces propres, stable. Si $F\neq E$, il a un supplémentaire stable $G\neq\{0\}$; sur $\mathbb{C}$, u_G a une valeur propre, donc un vecteur propre dans G :

$$G\cap F\neq\{0\}$$

— contradiction. Donc $F=E$: u est diagonalisable.

Réponse. Diagonalisable ⇒ supplémentaire stable ; N nilpotent : contre-exemple ; réciproque vraie sur $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 9 – Vecteur propre commun

a) Soit λ une valeur propre de u (existe sur $\mathbb{C}$). $E_\lambda(u)$ est stable par v ; l'induit v_{E_λ} a une valeur propre μ et un vecteur propre $x\in E_\lambda(u)$:

$$u(x)=\lambda x,\qquad v(x)=\mu x$$

b) Matriciellement, $A^{\mathsf T}$ et $B^{\mathsf T}$ commutent ; par a), elles ont un vecteur propre commun $L^{\mathsf T}$, d'où un hyperplan $H=\ker L$ stable par A et B. Les induits sur H commutent ; par hypothèse de récurrence, ils sont cotrigonalisables dans une base $(h_1,\dots,h_{n-1})$ de H. On complète par un vecteur h_n : dans $(h_1,\dots,h_n)$, A et B sont triangulaires supérieures.

c) Non : $u=v=R_{\pi/2}$ (rotation du plan) commutent mais n'ont aucun vecteur propre réel.

Réponse. Vecteur propre commun dans $E_\lambda(u)$; cotrigonalisation par récurrence ; faux sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10 – Noyaux itérés et décomposition de Fitting

a) $u^k(x)=0\Rightarrow u^{k+1}(x)=0$. Si $N_{r+1}=N_r$ et $x\in N_{r+2}$, alors $u(x)\in N_{r+1}=N_r$, donc $x\in N_{r+1}$: $N_{r+2}=N_{r+1}$, et par récurrence la suite est constante.

b) Tant que la suite croît strictement, la dimension augmente d'au moins 1 ; elle est majorée par n, donc stationne à un rang $r\le n$.

c) $\dim N_r+\dim I_r=n$ (rang). Si $x\in N_r\cap I_r$, $x=u^r(y)$ et $u^{2r}(y)=0$, donc $y\in N_{2r}=N_r$ et $x=0$. Ainsi

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E = \ker u^r \oplus \mathrm{Im} u^r$$

— Ces deux sous-espaces commutent avec u (polynômes en u), donc sont stables. $u^r = 0$ sur N_r ; sur I_r, l'induit est injectif ($\ker u \cap I_r \subset N_r \cap I_r = \{0\}$), donc inversible.

Réponse. Stationnement en $r \leq n$; $E = \ker u^r \oplus \mathrm{Im} u^r$, u nilpotent sur l'un, inversible sur l'autre.

Correction de l'exercice 11 – Fitting sur un exemple

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\ker A$: $y + z = 0$, $z = 0$, donc $\ker A = \mathrm{Vect}(e_1)$.
$\ker A^2 = \{z = 0\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Et $A^3 = A \cdot A^2$ a pour dernière colonne
$(2 + 4, 4, 8) = (6, 4, 8)$, ses deux premières colonnes nulles : $\ker A^3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

b) $r = 2$ et $\mathrm{Im} A^2 = \mathrm{Vect}(3, 2, 4)$. On vérifie que $f = (3, 2, 4)$ est propre :

$$Af = (2 + 4, 4, 8) = 2f$$

c) Dans la base (e_1, e_2, f) : $Ae_1 = 0$, $Ae_2 = e_1$, $Af = 2f$, d'où la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: bloc nilpotent et bloc inversible.

Réponse. $\ker A^2 = \ker A^3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Im} A^2 = \mathrm{Vect}(3, 2, 4)$; matrice $\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 2\right)$.

Correction de l'exercice 12 – Drapeau stable et trigonalisation

a) Si $(e_1, \ldots, e_n)$ trigonalise u, alors $u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$: les $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ conviennent. Réciproquement, on choisit $e_k \in F_k \setminus F_{k-1}$; $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base et $u(e_k) \in F_k$: matrice triangulaire.

b) $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$, $\ker(A - 2I) = \mathrm{Vect}(1, -1)$. On prend $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1')$ avec $e_1' = (1, -1)$, complété par $e_2' = (0, 1)$: $Ae_2' = (-1, 3) = -e_1' + 2e_2'$. Ainsi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) F_1 serait une droite stable, donc engendrée par un vecteur propre réel ; $R_{\pi/2}$ n'en a pas.

Réponse. Trigonalisable $\Leftrightarrow$ drapeau stable ; $A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; pas de droite stable pour $R_{\pi/2}$.

Correction de l'exercice 13 – Commutant d'un endomorphisme cyclique

a) Si $Q = \sum_{k<n} q_k X^k$ annule u, alors $\sum q_k u^k(x_0) = 0$ et la liberté donne $Q = 0$. Donc $\deg \pi_u \geq n$, et $\pi_u \mid \chi_u$ de degré n, unitaires : $\pi_u = \chi_u$.

b) On décompose $v(x_0) = \sum_{k<n} p_k u^k(x_0) = P(u)(x_0)$. Pour tout k :

$$v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0)) = u^k P(u)(x_0) = P(u)(u^k(x_0))$$

— v et $P(u)$ coïncident sur une base : $v = P(u)$.

c) Le commutant est $\mathrm{K}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, \ldots, u^{n-1})$, de dimension $\deg \pi_u = n$.

Réponse. $\pi_u = \chi_u$; commutant = $\mathrm{K}[u]$, de dimension n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Stables et blocs de Jordan

a) A : $\ker(A-2I) = \mathrm{Vect}(e_1)$, une seule droite stable. B : tout vecteur non nul est propre, **toutes** les droites sont stables.

b) A : $\{0\}$, $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathbb{R}^2$, soit 3 stables. B : $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et une infinité de droites.

c) $\pi_A = (X-2)^2$: $A-2I$ est nilpotent cyclique, ses stables sont totalement ordonnés (comme pour la dérivation). $\pi_B = X-2$: B est scalaire, tout sous-espace est stable.

$$\pi_A = \chi_A = (X-2)^2, \qquad \pi_B = X-2 \neq \chi_B$$

Réponse. A : 3 stables ; B : une infinité ; $\pi_A = \chi_A$ (cyclique) contre π_B de degré 1.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : tous les sous-espaces stables

a) $\pi_A = \mathrm{ppcm}((X-2)^2, X-3) = (X-2)^2(X-3)$. Lemme des noyaux :
$\ker(A-2I)^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\ker(A-3I) = \mathrm{Vect}(e_3)$.

b) Les projecteurs associés sont des polynômes en A, donc laissent F stable ; pour $x \in F$, $x = p_1(x) + p_2(x)$ avec $p_i(x) \in F$ dans chaque noyau.

c) Sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, l'induit est $2I + N$ avec N nilpotent cyclique : stables $\{0\}$, $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Sur $\mathrm{Vect}(e_3)$: $\{0\}$ et $\mathrm{Vect}(e_3)$. En combinant (3×2) :

$$\{0\},\ \mathbb{R}e_1,\ \mathbb{R}e_3,\ \mathrm{Vect}(e_1, e_2),\ \mathrm{Vect}(e_1, e_3),\ \mathbb{R}^3$$

— soit 6 sous-espaces stables (deux droites, deux plans).

Réponse. $\pi_A = (X-2)^2(X-3)$; 6 stables : $\{0\}$, $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_3$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $\mathbb{R}^3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).