Plaquette 1 – Valeurs propres, sous-espaces propres et polynôme caractéristique

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Éléments propres.

— λ est **valeur propre** de u s'il existe $x \neq 0$ avec $u(x) = \lambda x$; x est un **vecteur propre**.

— **Sous-espace propre** : $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$, de dimension ≥ 1.

— **Spectre** $\mathrm{Sp}(u)$: ensemble des valeurs propres.

Polynôme caractéristique.

$$\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{id} - u)$$

— $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.

— χ_u est **unitaire** de degré n, et

$$\chi_u(X) = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)$$

— **Somme et produit** (si χ_u est scindé, racines comptées avec multiplicité) :

$$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}(u) \qquad \prod \lambda_i = \det(u)$$

— **Matrices semblables** : même χ, même trace, même déterminant, même spectre. La réciproque est fausse.

Multiplicités.

— **Algébrique** m_λ : multiplicité de λ comme racine de χ_u.

— **Géométrique** $d_\lambda = \dim E_\lambda$.

— **Inégalité fondamentale** : $1 \leq d_\lambda \leq m_\lambda$.

— **Somme directe** : les sous-espaces propres associés à des valeurs propres **distinctes** sont en somme directe ; en particulier des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont **libres**.

Cas particuliers utiles.

— Matrice **triangulaire** : les valeurs propres sont les coefficients **diagonaux**.

— $\mathrm{Sp}\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Sp}(A)$; $\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left\langle \lambda^{-1} \right\rangle$; $\mathrm{Sp}(P(A)) \supset \{P(\lambda)\}$.

Correction de l'exercice 1 – Éléments propres d'une matrice 2x2

Polynôme caractéristique : $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det A = X^2 - 7X + 10$.

— $\det A = 12 - 2 = 10$ et $\mathrm{tr}(A) = 7$ ✓

— Racines : $X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 5\}$.

Sous-espace propre pour $\lambda = 2$: $(A - 2I)X = 0$ donne $2x + 2y = 0$, soit $y = -x$.

— $E_2 = \mathrm{Vect}((1, -1))$.

Pour $\lambda = 5$: $-x + 2y = 0$, soit $x = 2y$.

— $E_5 = \mathrm{Vect}((2, 1))$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Vérifications** : $A(1,-1) = (4-2,\ 1-3) = (2,-2) = 2(1,-1)$ ✓ ;
$A(2,1) = (8+2,\ 2+3) = (10,5) = 5(2,1)$ ✓
— **Contrôle global** : somme des valeurs propres = 7 = tr ✓, produit = 10 = det ✓

Réponse. $\mathrm{Sp} = \{2,5\}$, $E_2 = \mathrm{Vect}(1,-1)$, $E_5 = \mathrm{Vect}(2,1)$.

Correction de l'exercice 2 – Matrice triangulaire

— **Spectre** : la matrice est triangulaire, donc $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{1,4\}$.
— Multiplicités algébriques : $m_1 = 2$ et $m_4 = 1$.

Sous-espace propre pour $\lambda = 1$: $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, de rang 2.

— Donc $d_1 = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$.

Pour $\lambda = 4$: $d_4 = 1$ (toujours égal à m_λ quand la multiplicité vaut 1).

— **Conclusion** : $d_1 < m_1$, donc A n'est **pas diagonalisable**.
— **Contrôle** : $d_1 + d_4 = 2 < 3$ — la somme des dimensions propres n'atteint pas n, confirmation directe.

Réponse. $\mathrm{Sp} = \{1,4\}$; $d_1 = d_4 = 1$: non diagonalisable.

Correction de l'exercice 3 – Multiplicités

— $\chi_A = (X-2)^2(X-5)$, donc $m_2 = 2$.
— $A - 2I = \mathrm{diag}(0,0,3)$, de rang 1, donc $d_2 = 3 - 1 = 2$.
— **Égalité** : $d_2 = m_2 = 2$.
— De même $d_5 = m_5 = 1$.
— **Conclusion** : pour **chaque** valeur propre, $d_\lambda = m_\lambda$ — la matrice est **diagonalisable** (elle est même déjà diagonale).
— **Comparaison avec l'exercice précédent** : même polynôme caractéristique *type* $(X-a)^2(X-b)$, mais dimensions propres différentes. Le polynôme caractéristique **seul** ne détermine pas la diagonalisabilité.

Réponse. $d_2 = m_2 = 2$: diagonalisable.

Correction de l'exercice 4 – Spectre et opérations

— A^{-1} : si $Ax = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$. Donc $\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1 \right\rangle$.
— A^2 : $A^2x = \lambda^2 x$, donc les valeurs propres sont 4, 9, 1. Ici $\mathrm{Sp}(A^2) = \{4,9,1\}$.
— A^{T} : $\chi_{A^{\mathsf{T}}} = \chi_A$ car $\det\left(M^{\mathsf{T}}\right) = \det M$. Donc **même spectre** : $\{2,3,-1\}$.
— **Attention** : A et A^{T} ont le même spectre mais **pas les mêmes vecteurs propres** en général.
— **Contrôle** : $\det A = 2 \times 3 \times (-1) = -6$ et $\det\left(A^{-1}\right) = -\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (-1)$ ✓

Réponse. $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1 \right\rangle$; $\{1,4,9\}$; $\{2,3,-1\}$.

Correction de l'exercice 5 – Vecteurs propres et liberté

Récurrence sur le nombre p de vecteurs.

— $p = 1$: un vecteur propre est non nul, donc la famille est libre.
— **Hérédité** : supposons le résultat vrai pour $p-1$ vecteurs et considérons une relation

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p = 0$$

— On applique u : $\sum \alpha_i \lambda_i x_i = 0$.
— On soustrait λ_p fois la relation initiale :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$$

— Par hypothèse de récurrence, cette famille de $p-1$ vecteurs est libre, donc $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0$ pour $i \leq p-1$.
— Les λ_i étant **distincts**, $\lambda_i - \lambda_p \neq 0$, donc $\alpha_i = 0$ pour $i \leq p-1$; il reste $\alpha_p x_p = 0$, d'où $\alpha_p = 0$.
— **Corollaire capital** : un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres **distinctes** est **diagonalisable**.

Réponse. Récurrence : on applique u puis on soustrait λ_p fois la relation.

Correction de l'exercice 6 – Trace et déterminant

— **Somme des valeurs propres** : $1 + 2 + \lambda = 6$, donc $\lambda = 3$.
— **Produit** : $\det A = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
— **Polynôme caractéristique** : $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
— **Contrôle des coefficients** : le coefficient de X^2 est $-\mathrm{tr}(A) = -6$ ✓, le terme constant est $(-1)^3 \det A = -6$ ✓
— **Diagonalisabilité** : trois valeurs propres **distinctes** en dimension 3 — A est nécessairement **diagonalisable**, semblable à $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$.
— **Usage pratique** : trace et déterminant fournissent deux équations gratuites et servent toujours de vérification après un calcul de spectre.

Réponse. $\lambda = 3$ et $\det A = 6$.

Correction de l'exercice 7 – Endomorphisme sur les polynômes

Matrice dans la base $\left(1, X, X^2\right)$: on calcule les images.

— $u(1) = 1$; $u(X) = X - 1$; $u\left(X^2\right) = X^2 - 2X$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Spectre** : la matrice est triangulaire, donc $\chi_u = (X-1)^3$ et 1 est l'**unique** valeur propre, de multiplicité 3.
— **Sous-espace propre** : $u(P) = P$ équivaut à $P' = 0$, c'est-à-dire P **constant**.
— Donc $E_1 = \mathbb{R}_0[X]$, de dimension 1.
— **Conclusion** : $d_1 = 1 < 3 = m_1$, donc u n'est **pas diagonalisable**.
— **Structure** : $u = \mathrm{id} - D$ avec D la dérivation, **nilpotente** d'indice 3 sur $\mathbb{R}_2[X]$; u est donc unipotent.

Réponse. $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, E_1 = constantes, non diagonalisable.

Correction de l'exercice 8 – Matrice de rang 1

— **Rang** : $\mathrm{rg}(A) = 1$, donc $\dim \ker A = n - 1$: 0 est valeur propre de multiplicité géométrique $n - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Autre valeur propre** : $AC = C(LC) = (LC)C$, donc C est vecteur propre pour la valeur propre $\alpha = LC = \mathrm{tr}(A)$ (produit scalaire ligne-colonne).
— **Polynôme caractéristique** : $\chi_A = X^{n-1}(X - \alpha)$.
— **Discussion** :
— si $\alpha \neq 0$, les dimensions propres sont $n-1$ et 1 : A est **diagonalisable** ;
— si $\alpha = 0$, alors $A^2 = C(LC)L = 0$: A est **nilpotente** non nulle, donc **non diagonalisable**.
— **Exemple** : $C = (1,2,3)^{\mathsf{T}}$, $L = (1,2,3)$ donne $\alpha = 14$ et $A^2 = 14A$, retrouvé plus haut ✓

Réponse. $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}A)$; diagonalisable ssi $\mathrm{tr}A \neq 0$.

Correction de l'exercice 9 – Matrice compagnon

On développe $\det(XI - C)$ selon la **première ligne**.

$$XI - C = \begin{pmatrix} X & 0 & c \\ -1 & X & b \\ 0 & -1 & X + a \end{pmatrix}$$

— Développement : $X\begin{vmatrix} X & b \\ -1 & X+a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.
— Premier mineur : $X(X+a) + b = X^2 + aX + b$.
— Second mineur : $(-1)(-1) - 0 = 1$.
— **Résultat** : $\chi_C = X\left(X^2 + aX + b\right) + c = X^3 + aX^2 + bX + c$.
— **Propriété remarquable** : **tout** polynôme unitaire est le polynôme caractéristique d'une matrice — sa **matrice compagnon**.
— **Contrôle** : la trace de C vaut $-a$, et le coefficient de X^2 dans χ_C est bien $a = -\mathrm{tr}(C)$ ✓
— **Usage** : c'est le lien entre **récurrences linéaires** et réduction — la suite $u_{n+3} = -au_{n+2} - bu_{n+1} - cu_n$ a pour matrice de transition C.

Réponse. $\chi_C = X^3 + aX^2 + bX + c$.

Correction de l'exercice 10 – Somme directe des sous-espaces propres

— **Somme des dimensions propres** : $2 + 1 = 3 < 4 = n$.
— Or A est diagonalisable **si et seulement si** cette somme vaut n.
— **Conclusion** : A n'est **pas diagonalisable**.
— **Dimension de la somme** : les sous-espaces propres étant toujours en **somme directe**, $\dim(E_1 \oplus E_2) = 3$.
— **Où est le défaut ?** Pour $\lambda = 2$: $d_2 = 1 < m_2 = 2$. Le sous-espace propre est « trop petit ».
— **Réparation** : on remplace E_2 par le **sous-espace caractéristique** $\ker(A - 2I)^2$, de dimension $m_2 = 2$; on obtient alors une décomposition de $\mathbb{R}^4$ et une réduction de Jordan.

Réponse. Non diagonalisable ; $\dim(E_1 \oplus E_2) = 3$.

Correction de l'exercice 11 – Spectre d'une matrice stochastique

— **Valeur propre** 1 : posons $C = (1,1,\ldots,1)^{\mathsf{T}}$. La i-ième coordonnée de AC est la somme de la ligne i, soit 1. Donc $AC = C$: 1 est valeur propre, de vecteur propre C.
— **Majoration** : soit λ une valeur propre et x un vecteur propre. Soit i l'indice où $|x_i|$ est **maximal** (non nul).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— La i-ième ligne de $Ax = \lambda x$ donne $\lambda x_i = \sum_j a_{ij} x_j$, donc

$$|\lambda||x_i| \leq \sum_j a_{ij}|x_j| \leq |x_i| \sum_j a_{ij} = |x_i|$$

— En divisant par $|x_i| > 0$: $|\lambda| \leq 1$.

— **Interprétation** : A est la matrice de transition d'une **chaîne de Markov** ; le vecteur propre pour $\lambda = 1$ traduit la conservation de la masse de probabilité, et $|\lambda| \leq 1$ la stabilité du processus.

Réponse. $AC = C$ avec C constant ; et $|\lambda| \leq 1$ par la ligne du maximum.

Correction de l'exercice 12 – Éléments propres de la transposition

a) $T^2 = \mathrm{id}$: $X^2 - 1$ annule T, donc $\mathrm{Sp}T \subset \{1, -1\}$.

b) $E_1 = S_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques), $E_{-1} = A_n(\mathbb{R})$ (antisymétriques), tous deux non nuls si $n \geq 2$. Leurs dimensions :

$$\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

— de somme n^2 : $M_n = S_n \oplus A_n$, et T est diagonalisable.

c) $\mathrm{tr}T = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$ et $\det T = (-1)^{n(n-1)/2}$. Pour $n = 2$: $\mathrm{tr}T = 2$, $\det T = -1$.

Réponse. $\mathrm{Sp}T = \{1, -1\}$, $E_1 = S_n$, $E_{-1} = A_n$; $\mathrm{tr}T = n$, $\det T = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 13 – La dérivation en dimension infinie

a) $f' = \lambda f \Leftrightarrow f(x) = Ce^{\lambda x}$ (équation différentielle linéaire du premier ordre). Pour tout réel λ, $E_\lambda = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$ est une droite.

b) $f'' = \mu f$: si $\mu = \omega^2 > 0$, $E_\mu = \mathrm{Vect}(e^{\omega x}, e^{-\omega x})$; si $\mu = 0$, $E_0 = \mathbb{R}_1[X]$ (fonctions affines) ; si $\mu = -\omega^2 < 0$, $E_\mu = \mathrm{Vect}(\cos \omega x, \sin \omega x)$. Tout réel est valeur propre, chaque sous-espace propre est un plan :

$$\mathrm{Sp}(D^2) = \mathbb{R}, \qquad \dim E_\mu = 2$$

c) Sur $\mathbb{R}_n[X]$, D est nilpotent et 0 est sa seule valeur propre : en dimension infinie, le spectre peut être infini (ici $\mathbb{R}$ tout entier).

Réponse. $\mathrm{Sp}D = \mathbb{R}$, $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e^{\lambda x})$; pour D^2, plans $\mathrm{Vect}(e^{\pm \omega x})$, $\mathbb{R}_1[X]$ ou $\mathrm{Vect}(\cos \omega x, \sin \omega x)$.

Correction de l'exercice 14 – L'endomorphisme M ↦ AM

a) $AM = \lambda M$ signifie que chaque colonne C_j de M vérifie $AC_j = \lambda C_j$. Une matrice $M \neq 0$ a une colonne non nulle, qui est alors vecteur propre de A. Réciproquement, si $AX = \lambda X$, $M = (X\ 0\ \cdots\ 0)$ convient.

b) $\ker(L_A - \lambda\,\mathrm{id})$ est l'ensemble des matrices dont toutes les colonnes sont dans $E_\lambda(A)$, donc

$$\dim \ker(L_A - \lambda\,\mathrm{id}) = n \dim E_\lambda(A)$$

c) On ordonne la base canonique colonne par colonne : L_A agit sur chaque colonne par A, donc sa matrice est diagonale par blocs $\mathrm{diag}(A, \ldots, A)$ (n blocs). D'où $\chi_{L_A} = \chi_A^n$; en particulier $\mathrm{tr}L_A = n\mathrm{tr}A$ et $\det L_A = (\det A)^n$.

Réponse. $\mathrm{Sp}L_A = \mathrm{Sp}A$; $\dim E_\lambda(L_A) = n \dim E_\lambda(A)$; $\chi_{L_A} = \chi_A^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète

a) **Astuce** : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ dans $\det(XI - A)$ fait apparaître $X - 2$ en facteur.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)(X+1)^2$$

— **Contrôle** : $\operatorname{tr}(A) = 0 = 2 + (-1) + (-1)$ ✓ ; $\det A = 2$ et le produit des valeurs propres vaut $2 \times (-1)^2 = 2$ ✓ (calcul direct par Sarrus : $0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$).

b) **Pour** $\lambda = 2$: $(A - 2I)X = 0$ donne $-2x + y + z = 0$ et ses permutations ; la seule solution commune est $x = y = z$.

— $E_2 = \operatorname{Vect}((1,1,1))$, de dimension $1 = m_2$ ✓

Pour $\lambda = -1$: $A + I$ est la matrice pleine de 1, de **rang 1**.

— Le système se réduit à $x + y + z = 0$, donc $d_{-1} = 2 = m_{-1}$ ✓

— $E_{-1} = \operatorname{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$.

— **Conclusion** : $1 + 2 = 3 = n$, donc A est **diagonalisable**, semblable à $\operatorname{diag}(2,-1,-1)$.

— **Remarque** : A est **symétrique réelle** — le théorème spectral garantissait a priori sa diagonalisabilité en base orthonormée, et l'on vérifie bien que $E_2 \perp E_{-1}$.

Réponse. a) $(X-2)(X+1)^2$ · b) diagonalisable, $\operatorname{diag}(2,-1,-1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).