Plaquette 4 – Diagonalisabilité : critères, paramètres et endomorphismes d'espaces de matrices

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour décider si un endomorphisme est diagonalisable, on dispose de trois outils : la **comparaison des dimensions** ($\sum \dim E_\lambda = n$, ou $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour chaque λ), un **polynôme annulateur scindé à racines simples**, ou une **base propre explicite**. Pour un endomorphisme d'un espace de matrices ou de fonctions, on commence par chercher des vecteurs propres évidents (matrices de trace nulle, identité, matrices élémentaires, fonctions paires et impaires) et on compte les dimensions. Dans une discussion selon un paramètre, on isole les valeurs où des valeurs propres se confondent : c'est là que la diagonalisabilité peut tomber en défaut.

Exercice 1 – L'endomorphisme M ↦ M + tr(M) I

Soit $\varphi : M \mapsto M + \operatorname{tr}(M) I_n$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

a) Déterminer φ sur l'hyperplan H des matrices de trace nulle, puis $\varphi(I_n)$.

b) En déduire que φ est diagonalisable, son spectre et ses sous-espaces propres.

c) Calculer $\det \varphi$ et φ^{-1}.

Exercice 2 – L'endomorphisme M ↦ tr(M) A - tr(A) M

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{tr} A \neq 0$ et $\psi : M \mapsto \operatorname{tr}(M) A - \operatorname{tr}(A) M$.

a) Calculer $\psi(A)$ et $\psi(M)$ pour M de trace nulle.

b) En déduire que ψ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

c) Que se passe-t-il si $\operatorname{tr} A = 0$ et $A \neq 0$?

Exercice 3 – L'endomorphisme P ↦ P(1 - X)

Soit $s : P \mapsto P(1 - X)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que s est une symétrie et en déduire qu'il est diagonalisable.

b) Montrer que $((X - \frac{1}{2})^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base propre et préciser les valeurs propres.

c) En déduire $\dim E_1$, $\dim E_{-1}$, $\operatorname{tr} s$ et $\det s$ pour $n = 4$.

Exercice 4 – L'opérateur de Volterra n'a pas de valeur propre

Soit V l'endomorphisme de $E = C([0,1], \mathbb{R})$ défini par $V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que 0 n'est pas valeur propre.

b) Soit $\lambda \neq 0$ et f tel que $V(f) = \lambda f$. En posant $g = V(f)$, établir une équation différentielle vérifiée par g, puis conclure.

c) Comparer avec la dimension finie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – L'endomorphisme P ↦ (X - a)P'

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u : P \mapsto (X-a)P'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Calculer $u((X-a)^k)$.

b) En déduire que u est diagonalisable et donner ses éléments propres.

c) Résoudre $u(P) - 2P = (X-a)^3$, puis comparer avec l'équation $u(P) - 3P = (X-a)^3$.

Exercice 6 – Une matrice par blocs

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

a) Calculer $M\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$.

b) En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $\chi_M = X^n \chi_{2A}$.

c) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 7 – Discussion selon un paramètre

Soit $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer le spectre de A_a avec les multiplicités.

b) Calculer le rang de $A_a - I$ selon a.

c) Conclure sur la diagonalisabilité, et diagonaliser A_0.

Exercice 8 – Diagonalisabilité d'une matrice de rang 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1, $n \geq 2$.

a) Montrer qu'on peut écrire $A = UV^{\mathsf{T}}$ et que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

b) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}A \neq 0$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 – A et 2A semblables

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ semblable à $2A$.

a) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}A$, alors $2^k\lambda \in \mathrm{Sp}A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que A est nilpotente.

c) Vérifier que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $2N$ (donner la matrice de passage).

Peut-on avoir A diagonalisable non nulle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Matrices d'ordre fini

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^k = I_n$ pour un $k \geq 1$.

a) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines k-ièmes de l'unité.

b) Montrer que $|\mathrm{tr} A| \leq n$, avec égalité si et seulement si $A = \omega I_n$, $\omega^k = 1$.

c) Montrer que si $\mathrm{tr} A = n$, alors $A = I_n$. Le résultat a) subsiste-t-il sur $\mathbb{R}$ (diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 11 – La matrice antidiagonale

Soit $K \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice ayant des 1 sur l'antidiagonale ($k_{i,n+1-i} = 1$) et des 0 ailleurs.

a) Calculer K^2. En déduire que K est diagonalisable.

b) Déterminer E_1 et E_{-1} et leurs dimensions selon la parité de n.

c) En déduire $\mathrm{tr} K$ et $\det K$.

Exercice 12 – Matrices circulantes : diagonalisation commune

Soit $P \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice de la permutation circulaire ($Pe_j = e_{j-1}$, indices modulo n) et $C = Q(P)$ avec $Q = c_0 + c_1 X + \ldots + c_{n-1} X^{n-1}$ (matrice circulante).

a) Montrer que P est diagonalisable, de valeurs propres les ω^k, $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$, avec $F_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k})$ pour vecteurs propres.

b) En déduire que toutes les matrices circulantes sont diagonalisables dans la même base (F_k), avec $CF_k = Q(\omega^k) F_k$.

c) En déduire $\det C = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)$ et l'appliquer à $n = 2$.

Exercice 13 – Une matrice nilpotente diagonalisable est nulle

a) Montrer qu'une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im} A \subset \ker A$ et en déduire $\mathrm{rg} A \leq \frac{n}{2}$.

c) Donner une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ de carré nul et de rang 2.

Exercice 14 – Diagonalisation et polynôme en A

a) Montrer que si A est diagonalisable, $P(A)$ l'est pour tout polynôme P.

b) La réciproque est-elle vraie ? Étudier $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = X^2$.

c) Montrer que si $P(A)$ est diagonalisable et si $P'(\lambda) \neq 0$ pour toute valeur propre complexe λ de A, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (on pourra considérer $Q = \prod_{\mu} (P - \mu)$, le produit portant sur $\mathrm{Sp} P(A)$).

Exercice 15 – Synthèse : l'équation de Sylvester AM + MA = C

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et $\Psi : M \mapsto AM + MA$.

a) Pour $A = D$ diagonale, calculer $\Psi(E_{ij})$. En déduire que Ψ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_i + \lambda_j$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que l'équation $AM + MA = C$ a une unique solution pour tout C si et seulement si $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ pour tous i, j.

c) Résoudre $AM + MA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ pour $A = \mathrm{diag}(1, 2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).