Plaquette 2 – Polynôme caractéristique : calculs, propriétés, localisation du spectre

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Le polynôme caractéristique se calcule rarement en développant brutalement. On exploite la **structure** de la matrice : blocs triangulaires, matrice $aI + bJ$, matrices circulantes, tridiagonales (relation de récurrence sur la taille), produits AB et BA. Sans calculer les valeurs propres, on peut aussi les **localiser** (disques de Gershgorin) ou prouver leur **existence** (degré impair, valeurs intermédiaires). Enfin, $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ est un polynôme en λ : il n'a qu'un nombre fini de racines, ce qui donne des arguments de **densité**.

Exercice 1 – Le coefficient de X^{n-2} du polynôme caractéristique

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (avec multiplicité).

a) Exprimer le coefficient c_{n-2} de X^{n-2} dans χ_A à l'aide des λ_i.

b) En déduire $c_{n-2} = \dfrac{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)}{2}$.

c) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, puis en déduire χ_B pour B de taille 3 avec $\mathrm{tr}B = 2$, $\mathrm{tr}B^2 = 6$, $\det B = -2$.

Exercice 2 – Matrices triangulaires par blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in M_p$, $C \in M_q$.

a) Montrer que $\chi_M = \chi_A \chi_C$.

b) En déduire le spectre de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{C}$.

c) Le résultat reste-t-il vrai pour une matrice « en blocs pleins » $\begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$?

Exercice 3 – Spectre de aI + bJ

Soit $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $M = aI + bJ$ ($b \neq 0$).

a) Déterminer le rang de J, puis $\ker J$ et une valeur propre non nulle de J.

b) En déduire χ_J, puis χ_M et $\det M$.

c) Application : déterminant de la matrice de taille n ayant 2 sur la diagonale et 1 ailleurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Matrices circulantes

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = I + 2P + 3P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P^3 et χ_P. Déterminer les vecteurs propres de P (dans $\mathbb{C}^3$).

b) En déduire les valeurs propres de C.

c) Retrouver $\det C$ et $\mathrm{tr} C$.

Exercice 5 – Une matrice tridiagonale

Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale avec 2 sur la diagonale et -1 sur les deux diagonales voisines, et $D_n(x) = \det(xI - A_n)$.

a) Montrer que $D_{n+2} = (x-2)D_{n+1} - D_n$, avec $D_1 = x - 2$ et $D_0 = 1$.

b) Calculer D_3 et les valeurs propres de A_3.

c) En posant $x - 2 = -2\cos\theta$, montrer que $D_n = (-1)^n \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ et en déduire $\mathrm{Sp} A_n = \left\langle 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1} \right\rangle_{1 \le k \le n}$.

Exercice 6 – Même polynôme caractéristique, non semblables

a) Montrer que I_2 et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables.

b) Trouver deux matrices nilpotentes de taille 2, de même trace et de même déterminant, qui ne sont pas semblables.

c) Montrer que deux matrices de $M_2(\mathbb{C})$ **non scalaires** de même polynôme caractéristique sont semblables.

Exercice 7 – Valeur propre réelle en dimension impaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec n impair.

a) Montrer que A admet au moins une valeur propre réelle.

b) On suppose de plus $\det A > 0$. Montrer que A a une valeur propre réelle **strictement positive**.

c) En déduire qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet une droite stable, et qu'une rotation de $\mathbb{R}^3$ (det = 1, orthogonale) admet un axe.

Exercice 8 – Disques de Gershgorin

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ et $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

a) Soit λ valeur propre et X un vecteur propre associé, i un indice où $|x_i|$ est maximal. Montrer que $|\lambda - a_{ii}| \le R_i$.

b) Localiser les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ (elles sont réelles, A étant symétrique réelle).

c) En déduire que A est inversible et donner le signe de $\det A$, puis vérifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Matrices à diagonale strictement dominante

On dit que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est à **diagonale strictement dominante** si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i.

a) Montrer qu'une telle matrice est inversible (théorème d'Hadamard).

b) Montrer que si de plus A est réelle à coefficients diagonaux strictement positifs, alors toute valeur propre réelle de A est strictement positive, et $\det A > 0$.

c) Application : la matrice A_n tridiagonale $(2\ ;\ -1)$ est-elle à diagonale strictement dominante ?

Exercice 10 – Densité des matrices inversibles

a) Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$. Montrer que $A - \frac{1}{p} I$ est inversible pour tout p assez grand. En déduire que $GL_n(\mathrm{K})$ est dense dans $M_n(\mathrm{K})$.

b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ lorsque A est inversible.

c) En déduire, par densité et continuité, que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes A, B carrées.

Exercice 11 – Vecteurs propres à gauche et à droite

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, X tel que $AX = \lambda X$ et Y tel que $A^{\mathsf{T}} Y = \mu Y$, avec $\lambda \neq \mu$.

a) Calculer $Y^{\mathsf{T}} A X$ de deux façons et en déduire $Y^{\mathsf{T}} X = 0$.

b) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Les sous-espaces propres de A et de A^{T} sont-ils les mêmes en général ?

Exercice 12 – Matrices de permutation

À $\sigma \in S_n$ on associe P_σ, définie par $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$.

a) Montrer que P_σ est d'ordre fini et que ses valeurs propres complexes sont des racines de l'unité.

b) Pour $\sigma = (1\,2\,3)$ dans S_4, calculer χ_{P_σ}.

c) Montrer en général que $\chi_{P_\sigma} = \prod_{c} \left(X^{\ell(c)} - 1\right)$, le produit portant sur les cycles de σ (points fixes compris) de longueurs $\ell(c)$.

Exercice 13 – L'endomorphisme M ↦ AM - MA

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \mapsto AM - MA$.

a) On suppose $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Calculer $\Phi_A(E_{ij})$.

b) En déduire que si A est diagonalisable, Φ_A l'est, de valeurs propres les $\lambda_i - \lambda_j$.

c) Montrer que Φ_A n'est jamais inversible et calculer $\dim \ker \Phi_A$ lorsque A est diagonalisable à valeurs propres distinctes.

Exercice 14 – Matrice de rang 1 et formule du déterminant

Soit $U, V \in \mathbb{R}^n$ non nuls.

a) Calculer $\chi_{UV^{\mathsf{T}}}$ en utilisant le rang et la trace.

b) En déduire $\det(I + UV^{\mathsf{T}}) = 1 + V^{\mathsf{T}} U$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer le déterminant de la matrice $M = I + UV^{\mathsf{T}}$ pour $U = (1, 2, 3)$, $V = (1, 1, 1)$, et vérifier directement.

Exercice 15 – Synthèse : AB et BA rectangulaires

Soit $A \in M_{n,p}(\mathrm{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathrm{K})$.

a) On pose $M = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & XI_p \end{pmatrix}$. Calculer les produits par blocs MN et NM.

b) En prenant les déterminants, montrer que $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.

c) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles, avec les mêmes multiplicités. Application : spectre de AB pour $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = (3 \;\; 4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).