Plaquette 5 – Réduction appliquée : suites, chaînes de Markov, graphes, systèmes différentiels

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Beaucoup de phénomènes évoluent selon une loi **linéaire** : $X_{n+1} = AX_n$ (temps discret) ou $X' = AX$ (temps continu). Réduire A, c'est trouver les **modes propres** du système : dans une base propre, chaque coordonnée évolue indépendamment, comme λ^n ou $e^{\lambda t}$. Le comportement à long terme est dicté par la valeur propre de plus grand module (croissance, équilibre, oscillation). Pour une chaîne de Markov, la valeur propre 1 donne la **loi stationnaire** ; pour un graphe, les puissances de la matrice d'adjacence **comptent les chemins**.

Exercice 1 – Fibonacci et nombre d'or

Soit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

b) Diagonaliser A et en déduire la formule de Binet.

c) En déduire $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$ et l'identité de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 2 – Chaîne de Markov à deux états

Un système passe de l'état 1 à l'état 2 avec probabilité $a = 0{,}2$ et de 2 à 1 avec probabilité $b = 0{,}3$. Matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de P.

b) Déterminer la loi stationnaire $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ ($\mu P = \mu$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$).

c) Montrer que $P^n \to \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$, et donner la vitesse de convergence.

Exercice 3 – Modèle de population de Leslie

Une population a deux classes d'âge : jeunes j_n et adultes a_n. Chaque jeune donne en moyenne 1 jeune, chaque adulte 1,5 jeune ; la moitié des jeunes deviennent adultes ; les adultes meurent. Ainsi $X_{n+1} = LX_n$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de L.

b) Déterminer un vecteur propre positif associé à la plus grande valeur propre.

c) Décrire le comportement de X_n pour n grand (croissance et répartition des âges).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Un système différentiel

Résoudre le système $x' = x + 2y$, $y' = 2x + y$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

a) Écrire le système sous la forme $X' = AX$ et diagonaliser A.

b) Résoudre le système découplé et revenir à x, y.

c) Décrire le comportement quand $t \to +\infty$.

Exercice 5 – Équation du second ordre et matrice compagnon

On considère $y'' - 3y' + 2y = 0$.

a) Montrer que $Y = (y, y')$ vérifie $Y' = CY$ avec C à préciser, et calculer χ_C.

b) Diagonaliser C et en déduire les solutions.

c) Relier les valeurs propres de C à l'équation caractéristique usuelle.

Exercice 6 – Chemins dans un graphe

Soit le graphe chemin $1 - 2 - 3$, de matrice d'adjacence $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et interpréter ses coefficients.

b) Montrer que e_2 est vecteur propre de A^2 et en déduire le nombre de chemins de longueur $2k$ de 2 à 2.

c) Déterminer le spectre de A.

Exercice 7 – Suites couplées non diagonalisables

On considère $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2v_n$.

a) Écrire A telle que $X_{n+1} = AX_n$. Est-elle diagonalisable ?

b) Écrire $A = 2I + N$ et calculer A^n par la formule du binôme.

c) En déduire u_n et v_n, et comparer la croissance avec le cas diagonalisable.

Exercice 8 – Marche aléatoire sur un triangle

Un pion se déplace sur les sommets d'un triangle : à chaque étape, il va sur l'un des deux autres sommets avec probabilité $\frac{1}{2}$. La matrice de transition est $P = \frac{1}{2}(J - I)$ (J : matrice de 1).

a) Déterminer le spectre de P et montrer que P est diagonalisable.

b) Montrer que $P^n = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(I - \frac{1}{3}J\right)$.

c) En déduire la probabilité d'être au sommet de départ après n étapes, et sa limite.

Exercice 9 – Convergence des puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) En déduire que $A^n \to 0$ et que $\sum_{n \geq 0} A^n$ converge vers $(I - A)^{-1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer $(I - A)^{-1}$ (modèle de Leontief : production nécessaire pour satisfaire une demande finale).

Exercice 10 – Racines carrées d'une matrice diagonale

Soit $D = \mathrm{diag}(1, 4)$.

a) Montrer que toute matrice M telle que $M^2 = D$ commute avec D.

b) En déduire que M est diagonale, puis déterminer toutes les solutions.

c) Combien de solutions l'équation $M^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ admet-elle si les λ_i sont strictement positifs et distincts ?

Exercice 11 – Exponentielle d'une matrice diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\exp(tA) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$.

a) Calculer A^{2k} et A^{2k+1}, puis $\exp(tA)$.

b) Retrouver le résultat par diagonalisation de A.

c) Vérifier que $X(t) = \exp(tA)X_0$ est solution de $X' = AX$.

Exercice 12 – Oscillateurs couplés

Deux masses reliées par des ressorts vérifient $x'' = -2x + y$, $y'' = x - 2y$.

a) Écrire $X'' = KX$ et diagonaliser K.

b) En déduire les **modes propres** : solutions où x et y oscillent à la même fréquence.

c) Donner la solution générale.

Exercice 13 – Matrices 2 × 2 à coefficients strictement positifs

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d > 0$.

a) Montrer que A a deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 > \lambda_2$.

b) Montrer que $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

c) Montrer que λ_1 admet un vecteur propre à coordonnées strictement positives (cas 2 × 2 du théorème de Perron-Frobenius).

Exercice 14 – Point fixe d'une récurrence affine

Soit $X_{n+1} = AX_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A et justifier que $I - A$ est inversible.

b) Calculer le point fixe L et montrer que $X_n - L = A^n(X_0 - L)$.

c) En déduire que $X_n \to L$ et préciser la vitesse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : l’urne d’Ehrenfest à deux boules

Deux boules sont réparties entre deux urnes. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la change d’urne. X_n est le nombre de boules dans l’urne 1 (0, 1 ou 2).

a) Écrire la matrice de transition P.

b) Déterminer le spectre de P, montrer qu’elle est diagonalisable et déterminer la loi stationnaire.

c) La suite P^n converge-t-elle ? Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k$ converge et identifier la limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).