Plaquette 3 – Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un sous-espace F est **stable** par u si $u(F) \subset F$; dans une base adaptée à F, la matrice de u est alors **triangulaire par blocs**, et l'endomorphisme induit u_F vérifie $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$. Pour **déterminer tous les sous-espaces stables**, on décompose l'espace par le lemme des noyaux (les projecteurs sont des polynômes en u, donc tout stable se décompose), puis on étudie chaque morceau. Les droites stables sont engendrées par les vecteurs propres ; les hyperplans stables sont les noyaux des formes propres de la transposée.

Exercice 1 – Endomorphismes qui commutent

Soit $u, v \in L(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

a) Montrer que $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont stables par v.

b) Montrer que chaque sous-espace propre de u est stable par v.

c) Réciproquement, si u est diagonalisable et si v laisse stable chaque sous-espace propre de u, montrer que u et v commutent.

Exercice 2 – Matrice dans une base adaptée

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).

a) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable et que $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2 + e_3)$ est stable.

b) Écrire la matrice de u dans la base $(e_1, e_2 + e_3, e_3)$.

c) En déduire χ_A et les valeurs propres de A.

Exercice 3 – Hyperplans stables et transposée

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ et $H = \{X \mid LX = 0\}$ un hyperplan, L ligne non nulle.

a) Montrer que H est stable par A si et seulement s'il existe λ tel que $LA = \lambda L$, c'est-à-dire si L^{T} est vecteur propre de A^{T}.

b) Déterminer les plans stables de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – Stables d'un endomorphisme à valeurs propres distinctes

Soit u diagonalisable sur E de dimension n, de valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et (e_i) une base propre.

a) Montrer que tout sous-espace stable F vérifie $F = \bigoplus_i (F \cap \mathrm{K}e_i)$ (utiliser les projecteurs de Lagrange $L_i(u)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que les sous-espaces stables sont les $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$, $I \subset [\![1,n]\!]$. Combien y en a-t-il ?

c) Application : $A = \mathrm{diag}(1,2,3)$; énumérer ses plans stables.

Exercice 5 – Stables de la dérivation

Soit D la dérivation sur $E = \mathrm{K}_n[X]$ et F un sous-espace stable non nul.

a) Soit $P \in F$ de degré d maximal parmi les éléments de F. Montrer que $P, P', \dots, P^{(d)}$ sont dans F et forment une base de $\mathrm{K}_d[X]$.

b) En déduire que $F = \mathrm{K}_d[X]$.

c) Combien D a-t-il de sous-espaces stables ? Comparer avec un endomorphisme diagonalisable à valeurs propres distinctes.

Exercice 6 – Stables d'une rotation du plan

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

a) Montrer que R_θ n'a pas de valeur propre réelle.

b) En déduire les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ stables par R_θ.

c) Que se passe-t-il sur $\mathbb{C}^2$? Donner les droites stables.

Exercice 7 – Polynôme caractéristique de l'induit

Soit $u \in L(E)$ et F stable par u.

a) Montrer que χ_{u_F} divise χ_u et que π_{u_F} divise π_u.

b) En déduire que si χ_u est scindé, u_F est trigonalisable, et que si u est diagonalisable, u_F l'est aussi.

c) Application : u de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que le plan $P = \{x+y+z=0\}$ est stable et donner χ_{u_P}.

Exercice 8 – Supplémentaire stable

a) Soit u diagonalisable et F stable. Montrer que F admet un supplémentaire stable (compléter une base propre de F par des vecteurs propres de u).

b) Montrer que pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la droite $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable mais n'a pas de supplémentaire stable.

c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable est diagonalisable.

Exercice 9 – Vecteur propre commun

Soit u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace E de dimension finie $n \geq 1$, qui commutent.

a) Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire, par récurrence sur n, que u et v sont cotrigonalisables (on pourra raisonner sur les transposées pour obtenir un hyperplan stable commun).

c) Le résultat a) subsiste-t-il sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10 – Noyaux itérés et décomposition de Fitting

Soit $u \in L(E)$, $\dim E = n$, et $N_k = \ker u^k$, $I_k = \mathrm{Im} u^k$.

a) Montrer que (N_k) est croissante et que si $N_r = N_{r+1}$, alors $N_{r+k} = N_r$ pour tout k.

b) En déduire que la suite stationne à partir d'un rang $r \leq n$.

c) Montrer que $E = N_r \oplus I_r$, avec N_r et I_r stables, u nilpotent sur N_r et inversible sur I_r.

Exercice 11 – Fitting sur un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2, puis $\ker A$, $\ker A^2$, $\ker A^3$.

b) Déterminer le rang r de stationnement, et $\mathrm{Im} A^r$.

c) Écrire la matrice de A dans une base adaptée à $\ker A^r \oplus \mathrm{Im} A^r$.

Exercice 12 – Drapeau stable et trigonalisation

a) Montrer que u est trigonalisable si et seulement s'il existe une suite de sous-espaces stables $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = E$ avec $\dim F_k = k$.

b) Trouver un tel drapeau pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et trigonaliser A.

c) Pourquoi la rotation $R_{\pi/2}$ n'admet-elle pas de drapeau stable dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13 – Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soit $u \in L(E)$, $\dim E = n$, et x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base (on dit que u est **cyclique**).

a) Montrer que $\pi_u = \chi_u$ (aucun polynôme non nul de degré $< n$ n'annule u).

b) Soit v commutant avec u. Montrer que $v = P(u)$ où P est défini par $v(x_0) = P(u)(x_0)$.

c) En déduire la dimension du commutant de u.

Exercice 14 – Stables et blocs de Jordan

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = 2I_2$.

a) Déterminer les droites stables par A, puis par B.

b) Combien chacune a-t-elle de sous-espaces stables ?

c) Expliquer la différence par le polynôme minimal.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : tous les sous-espaces stables

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer π_A et la décomposition $\mathbb{R}^3 = \ker(A-2I)^2 \oplus \ker(A-3I)$.

b) Montrer que tout stable F vérifie $F = (F \cap \ker(A-2I)^2) \oplus (F \cap \ker(A-3I))$.

c) Déterminer les stables de chaque morceau, puis tous les sous-espaces stables de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).