Plaquette 1 – Valeurs propres, sous-espaces propres et polynôme caractéristique

Réduction des endomorphismes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule le **polynôme caractéristique**, on détermine les **sous-espaces propres** et leurs dimensions, on compare multiplicité algébrique et géométrique, et on exploite trace et déterminant comme contrôles.

Exercice 1 – Éléments propres d'une matrice 2x2

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Matrice triangulaire

Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la dimension de chaque sous-espace propre.

Exercice 3 – Multiplicités

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Comparer multiplicités algébrique et géométrique de $\lambda = 2$.

Exercice 4 – Spectre et opérations

Soit A inversible de valeurs propres 2, 3 et -1. Déterminer le spectre de A^{-1}, de A^2 et de A^{T}.

Exercice 5 – Vecteurs propres et liberté

Montrer que des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

Exercice 6 – Trace et déterminant

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ de valeurs propres 1, 2 et λ, avec $\operatorname{tr}(A) = 6$. Déterminer λ et $\det A$.

Exercice 7 – Endomorphisme sur les polynômes

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P - P'$. Déterminer les éléments propres de u.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Matrice de rang 1

Soit $A = CL$ où C est une colonne et L une ligne non nulles de K^n. Déterminer χ_A et le spectre de A.

Exercice 9 – Matrice compagnon

Calculer le polynôme caractéristique de $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Somme directe des sous-espaces propres

Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ avec $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$, $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$. A est-elle diagonalisable ? Quelle est la dimension de $E_1 \oplus E_2$?

Exercice 11 – Spectre d'une matrice stochastique

Soit A une matrice carrée à coefficients positifs dont **chaque ligne somme à** 1. Montrer que 1 est valeur propre, et que toute valeur propre vérifie $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 12 – Éléments propres de la transposition

Soit $T : M \mapsto M^{\mathsf{T}}$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer T^2 et en déduire les valeurs propres possibles de T.
b) Déterminer les sous-espaces propres et leurs dimensions.
c) En déduire $\mathrm{tr}\, T$ et $\det T$.

Exercice 13 – La dérivation en dimension infinie

Soit $D : f \mapsto f'$ sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) Montrer que tout réel λ est valeur propre de D et déterminer E_λ.
b) Déterminer les éléments propres de D^2.
c) Comparer avec la dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14 – L'endomorphisme M ↦ AM

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ et $L_A : M \mapsto AM$ sur $M_n(\mathrm{K})$.

a) Montrer que λ est valeur propre de L_A si et seulement si λ est valeur propre de A.
b) Décrire $\ker(L_A - \lambda\,\mathrm{id})$ en fonction de $E_\lambda(A)$ et donner sa dimension.
c) Montrer que $\chi_{L_A} = \chi_A^n$ (on pourra écrire la matrice de L_A dans une base adaptée aux colonnes).

Exercice 15 – Synthèse : étude complète

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer χ_A.

b) Déterminer les sous-espaces propres et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).