Plaquette 5 – Bord du disque, analyticité et problèmes de synthèse

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Abel radial. Si $\sum a_n$ converge, alors $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n$$

Zéros isolés. Si $f = \sum a_n x^n$ ($R>0$) n'est pas identiquement nulle, il existe p et g développable avec $g(0)\neq 0$ tels que $f(x) = x^p g(x)$: f ne s'annule pas sur un voisinage pointé de 0.

Formule de Parseval. Pour $0<r<R$: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum |a_n|^2 r^{2n}$, d'où $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ avec $M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)|$.

Correction de l'exercice 1 – Le théorème d'Abel radial

a) $\sum a_n x^n = \sum (r_{n-1}-r_n)x^n = r_{-1} + \sum_{n\geq 0} r_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} r_n x^n$ (séries absolument convergentes pour $x<1$, (r_n) étant bornée), d'où

$$\sum a_n x^n - r_{-1} = (x-1)\sum_{n\geq 0} r_n x^n$$

b) $\left|(1-x)\sum_{n\geq N} r_n x^n\right| \leq \varepsilon(1-x)\sum_{n\geq N} x^n \leq \varepsilon$.

c) La partie finie $(x-1)\sum_{n<N} r_n x^n$ tend vers 0 quand $x\to 1^-$; donc $\limsup \left|\sum a_n x^n - \sum a_n\right| \leq \varepsilon$ pour tout ε.

Réponse. Transformation d'Abel : l'écart vaut $(x-1)\sum r_n x^n$, petit car les restes le sont.

Correction de l'exercice 2 – Deux sommes classiques par Abel

a) $\arctan x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1,1[$; la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge (critère spécial) ; par Abel, sa somme vaut

$$\lim_{x\to 1^-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

b) $\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ sur $]-1,1[$, la série converge en 1, et $\ln(1+x)\to \ln 2$.

c) Le développement est établi sur l'intervalle ouvert de convergence ; l'égalité en $x=1$ demande un argument (Abel, ou la majoration directe du reste par une intégrale).

Réponse. Abel radial : $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Correction de l'exercice 3 – La réciproque d'Abel est fausse

a) $\sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$, mais $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement.

b) $\sum (n+1)(-x)^n = \frac{1}{(1+x)^2} \to \frac{1}{4}$, alors que le terme général ne tend pas vers 0.

c) Pour tout N, $\sum_{n\leq N} a_n x^n \leq \sum_n a_n x^n \leq \ell$ (la fonction est croissante en x, termes positifs). En faisant $x\to 1^-$: $\sum_{n\leq N} a_n \leq \ell$. La série à termes positifs converge, et Abel donne sa

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

somme : ℓ.

Réponse. $\frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$ sans convergence de $\sum (-1)^n$; pour $a_n \geq 0$ la réciproque est vraie.

Correction de l'exercice 4 – Zéros isolés et rigidité

a) $f(x) = x^p \sum_{k \geq 0} a_{p+k} x^k$, et $g = \sum a_{p+k} x^k$ a le même rayon, donc est continue en 0.

b) Par continuité, $g \neq 0$ sur un voisinage $]-\delta, \delta[$, et $x^p \neq 0$ pour $x \neq 0$.

c) Si f n'était pas nulle, b) interdirait des zéros arbitrairement proches de 0 ; or

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Contradiction : $f = 0$ (tous les coefficients sont nuls).

Réponse. $f = x^p g$ avec $g(0) \neq 0$: zéros isolés ; une série nulle sur une suite tendant vers 0 est nulle.

Correction de l'exercice 5 – Identifier une fonction par ses valeurs

a) $\frac{1}{n+1} = \frac{1/n}{1+1/n}$: $f(x) = \frac{x}{1+x}$ convient (rayon 1), et elle est unique par l'exercice précédent appliqué à la différence de deux solutions.

b) La continuité en 0 impose $f(0) = 0$; $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ (développable) vérifierait $g\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$, qui n'a pas de limite : impossible.

c) Une solution vérifierait $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}$, donc (rigidité) $f(x) = 2x$; mais alors

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{2n+1} \neq \frac{1}{n}$$

Pas de solution.

Réponse. a) $f(x) = \frac{x}{1+x}$; b) et c) : aucune.

Correction de l'exercice 6 – Équations fonctionnelles et séries entières

a) $\sum a_n 2^n x^n = \sum 2a_n x^n$: $a_n(2^n - 2) = 0$, donc $a_n = 0$ sauf $n = 1$: $f(x) = ax$.

b) $\sum (n+1) a_{n+1} x^n = \sum a_n 2^n x^n$: $(n+1)a_{n+1} = 2^n a_n$. Avec $a_0 = 0$, tous les a_n sont nuls : $f = 0$.

c) Les deux relations donnent $f(x) = \cos x + \sin x$, développable (rayon infini) :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} x^n}{n!}$$

Réponse. a) $f = ax$; b) $f = 0$; c) $f = \cos + \sin$.

Correction de l'exercice 7 – Formule de Parseval et inégalités de Cauchy

a) $|f|^2 = \sum_{n,m} a_n \overline{a}_m r^{n+m} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}$, famille sommable uniformément en θ (car $\sum |a_n| r^n < \infty$) : on intègre terme à terme, seuls les termes $n = m$ subsistent.

b) $|a_n|^2 r^{2n} \leq \sum_k |a_k|^2 r^{2k} \leq M(r)^2$.

c) $a_n = 1$ et $M\left(\frac{1}{2}\right) = \max \frac{1}{|1 - \mathrm{e}^{i\theta}/2|} = 2$ (en $\theta = 0$) : l'inégalité donne $1 \leq 2 \cdot 2^n$ ✓, et Parseval donne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left|1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2}=\sum_n 4^{-n}=\frac{4}{3}$$

Réponse. Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int|f(re^{i\theta})|^2=\sum|a_n|^2r^{2n}$, d'où $|a_n|\le M(r)r^{-n}$.

Correction de l'exercice 8 – Théorème de Liouville

a) Pour tout $r>0$:

$$|a_n|\le\frac{M}{r^n}\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad(n\ge1)$$

b) $f=a_0$ est constante.

c) sin est développable sur $\mathbb{C}$ (rayon infini) et non constante : elle n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$ (par exemple $|\sin(iy)|=|\mathrm{sh}y|\to+\infty$), bien qu'elle le soit sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $|a_n|\le Mr^{-n}\to0$: une fonction entière bornée est constante ; sin n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 9 – Équivalents au voisinage du bord

a) Pour tout N, $\sum b_nx^n\ge\sum_{n\le N}b_nx^n\to\sum_{n\le N}b_n$, arbitrairement grand.

b) Soit $\varepsilon>0$ et N tel que $|a_n-b_n|\le\varepsilon b_n$ pour $n\ge N$:

$$\left|\sum a_nx^n-\sum b_nx^n\right|\le\sum_{n<N}|a_n-b_n|+\varepsilon\sum_n b_nx^n$$

le premier terme est borné, le second est ε fois une quantité tendant vers $+\infty$: le rapport $\frac{\sum a_nx^n}{\sum b_nx^n}$ tend vers 1.

c) $\ln n\sim H_n$ et $\sum H_n$ diverge : $\sum\ln n\,x^n\sim-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ en 1^-.

Réponse. Coefficients équivalents positifs de série divergente : sommes équivalentes en 1^- ; $\sum\ln n\,x^n\sim\frac{\ln\frac{1}{1-x}}{1-x}$.

Correction de l'exercice 10 – Rayon et singularités complexes

a) $\frac{1}{1+x^2}=\sum(-1)^kx^{2k}$, de rayon 1 (divergence grossière pour $|x|\ge1$).

b) La série entière définit une fonction de la variable complexe sur le disque $|z|<1$, et $\frac{1}{1+z^2}$ n'est pas bornée près de $z=\pm i$ (module 1) : le disque de convergence ne peut contenir ces points. Le rayon est la distance de 0 à la singularité la plus proche dans $\mathbb{C}$.

c) Les racines de z^2-2z+5 sont $1\pm2i$, de module $\sqrt{5}$: en décomposant en éléments simples sur $\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-1-2i}-\frac{1}{z-1+2i}\right)$$

chaque terme se développe pour $|z|<\sqrt{5}$, et le rayon vaut exactement $\sqrt{5}$.

Réponse. Rayon 1 à cause des pôles $\pm i$; pour $\frac{1}{x^2-2x+5}$, rayon $\sqrt{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Solutions développables d'une équation singulière

a) Coefficient de x^n :
$(n+1)na_{n+1} - n(n-1)a_n + (n+1)a_{n+1} - 3na_n - a_n = (n+1)^2 a_{n+1} - (n^2+2n+1)a_n$, soit

$$(n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = 0$$

b) $a_n = a_0$ pour tout n : $y = a_0 \sum x^n = \frac{a_0}{1-x}$, rayon 1. Les solutions développables forment une droite (la seconde solution, en $\ln x$, n'est pas développable en 0).

c) $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$, $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$: $\frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1-3x}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{(1-x)^2} = \frac{2x+1-3x-1+x}{(1-x)^2} = 0$ ✓.

Réponse. $a_{n+1} = a_n$: les solutions développables sont $\frac{c}{1-x}$.

Correction de l'exercice 12 – Les nombres d'Euler

a) $\frac{1}{\cos}$ est paire : ses coefficients impairs sont nuls (unicité du DSE).

b) Le coefficient de x^{2n} du produit de $\sum \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$ et $\sum E_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ vaut $\sum_{j+k=n} \frac{(-1)^j E_{2k}}{(2j)!(2k)!}$, nul pour $n \geq 1$; on multiplie par $(2n)!$.

c) $E_0 = 1$; $n=1$: $E_2 - E_0 = 0$, $E_2 = 1$; $n=2$: $E_4 - 6E_2 + E_0 = 0$, $E_4 = 5$; $n=3$: $E_6 - 15E_4 + 15E_2 - E_0 = 0$, soit

$$E_6 = 75 - 15 + 1 = 61$$

En $x = 0{,}4$: $1 + 0{,}08 + 0{,}005333 + 0{,}000347 = 1{,}08568$, contre $\frac{1}{\cos 0{,}4} \approx 1{,}08570$.

Réponse. $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots$

Correction de l'exercice 13 – Une somme trigonométrique au bord

a) $\sum_{n\geq 1} \sin(n\theta)x^{n-1} = \operatorname{Im}\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} = \operatorname{Im}\frac{e^{i\theta} - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

b) La dérivée de $\arctan\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}$ vaut $\frac{1/\sin\theta}{1 + \frac{(x-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$, et la constante assure $T(0) = 0$. En $x = 1$: $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, d'où

$$\lim_{x\to 1^-} T(x) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi - \theta}{2}$$

(les angles étant dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour $\theta \in]0, \pi[$; le cas $\theta \in [\pi, 2\pi[$ s'en déduit par symétrie).

c) Abel : $\sum \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$. Pour $\theta = 1$: $\sum \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2} \approx 1{,}0708$.

Réponse. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$ sur $]0, 2\pi[$; $\sum \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Nombre d'involutions

a) Soit $\sigma(n+1) = n+1$ (et σ est une involution des n autres : I_n cas), soit $\sigma(n+1) = k \leq n$, et alors $\sigma(k) = n+1$, σ étant une involution des $n-1$ éléments restants : nI_{n-1} cas.

b) $I_n \leq n!$ donne un rayon ≥ 1. $F' = \sum I_{n+1}\frac{x^n}{n!} = \sum I_n \frac{x^n}{n!} + \sum nI_{n-1}\frac{x^n}{n!} = F + xF$. Avec $F(0) = 1$:

$$F(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 10$, $I_5 = 26$.

Réponse. $F(x) = \mathrm{e}^{x + x^2/2}$; $I_n : 1, 1, 2, 4, 10, 26$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le dilogarithme

a) Convergence normale sur $[-1, 1]$ ($\frac{1}{n^2}$) : continuité. La série dérivée $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$ a le rayon 1, de somme $-\frac{\ln(1-x)}{x}$.

b) $\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0$ (dérivée de $L(1-x)$: $-L'(1-x) = \frac{\ln x}{1-x}$).

c) Quand $x \to 1^-$: $L(x) \to L(1) = \frac{\pi^2}{6}$ (continuité), $L(1-x) \to 0$, et $\ln x \ln(1-x) \sim (x-1)\ln(1-x) \to 0$. Donc

$$L(x) + L(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$$

d) En $x = \frac{1}{2}$: $2L\left(\frac{1}{2}\right) + (\ln 2)^2 = \frac{\pi^2}{6}$, d'où $L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2} \approx 0{,}58224$.

Réponse. $L(x) + L(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$, donc $\sum \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).