Plaquette 3 – Développements en série entière : opérations et équations différentielles

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développements usuels (rayon ∞ pour les trois premiers, 1 pour les autres) :

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

— $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$; $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$; $\arctan x = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$; $(1+x)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{n} x^n$.

Unicité. Si $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ au voisinage de 0, alors $a_n = b_n$ pour tout n ; et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Méthode de l'équation différentielle. Injecter $y = \sum a_n x^n$, regrouper par puissance de x, identifier les coefficients, résoudre la récurrence, vérifier le rayon > 0.

Correction de l'exercice 1 – Une fraction à coefficients périodiques

a) $(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$.

b) Pour $|x| < 1$:

$$\frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{k \geq 0} x^{3k} = \sum_{k \geq 0} \left(x^{3k} - x^{3k+1}\right)$$

Les coefficients valent $1, -1, 0$ périodiquement : ils sont bornés et ne tendent pas vers 0, donc $R = 1$.

c) $100 = 3 \times 33 + 1$: le coefficient de x^{100} vaut -1, donc $f^{(100)}(0) = -100!$.

Réponse. $\frac{1}{1+x+x^2} = \sum (x^{3k} - x^{3k+1})$, $R = 1$; $f^{(100)}(0) = -100!$.

Correction de l'exercice 2 – Argument tangente hyperbolique et calcul de ln 2

a) $\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n} x^n$, ne gardant que les n impairs :

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

b) $\frac{1+x}{1-x} = 2$ pour $x = \frac{1}{3}$. Le reste après N termes est $\leq 2\sum_{k \geq N} 3^{-2k-1} = \frac{2 \cdot 3^{-2N-1}}{1 - 1/9} = \frac{3}{4} \cdot 9^{-N}$.

c) $2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309}\right) \approx 0{,}693135$, contre $\ln 2 \approx 0{,}693147$: écart $1{,}2 \times 10^{-5}$, conforme à la majoration ($\frac{3}{4} \cdot 9^{-4} \approx 1{,}1 \times 10^{-4}$). Bien plus rapide que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Réponse. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\sum \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$; avec $x = \frac{1}{3}$, quatre termes donnent $\ln 2 \approx 0{,}69314$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Exponentielle fois cosinus

a) $\mathrm{e}^{(1+i)x} = \sum \dfrac{(1+i)^n x^n}{n!}$ (rayon infini), et l’on prend la partie réelle terme à terme (x réel).

b) $(1+i)^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{in\pi/4}$:

$$\mathrm{e}^x \cos x = \sum_{n \geq 0} \frac{2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$$

c) Nul si et seulement si $\cos\frac{n\pi}{4} = 0$, soit $n \equiv 2 \pmod 4$. Vérification : $\mathrm{e}^x\cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)$, coefficient de x^2 : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓.

Réponse. $\mathrm{e}^x\cos x = \sum \dfrac{2^{n/2}\cos(n\pi/4)}{n!}x^n$, coefficients nuls pour $n \equiv 2$ [4].

Correction de l’exercice 4 – Puissances de fonctions trigonométriques

a) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 1 + \sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$.

b) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_k \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{4}\sum_k \dfrac{(-1)^k 3^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, soit

$$\sin^3 x = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k\left(3 - 3^{2k+1}\right)}{4(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(le terme $k=0$ est nul). Premiers termes : $k=1$ donne $\frac{-(3-27)}{24} = 1$, et $k=2$ donne $\frac{3-243}{480} = -\frac{1}{2}$: $\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \cdots$

c) $\dfrac{x^3 - \sin^3 x}{x^5} \to \frac{1}{2}$.

Réponse. $\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \cdots$, donc la limite vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 5 – Puissances négatives de 1 − x

a) $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$, d’où

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}x^n, \qquad R = 1$$

b) $\binom{-3}{n}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \binom{n+2}{2}$.

c) $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \left(\sum x^a\right)\left(\sum x^b\right)\left(\sum x^c\right)$: le coefficient de x^n compte les triplets (a,b,c) avec $a+b+c=n$. Par exemple $n=2$: 6 solutions, et $\binom{4}{2} = 6$ ✓.

Réponse. $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \sum\binom{n+2}{2}x^n$; c’est le nombre de solutions de $a+b+c=n$.

Correction de l’exercice 6 – Sinus intégral

a) $\dfrac{\sin t}{t} = \sum_{k\geq 0}\dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$, rayon infini.

b) Intégration terme à terme :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{Si}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

de rayon infini.

c) En $x = 1$, série alternée de termes décroissants : $1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots$. Le quatrième terme vaut $\approx 2{,}8 \times 10^{-5} < 10^{-4}$, donc trois termes suffisent : $\mathrm{Si}(1) \approx 1 - 0{,}05556 + 0{,}00167 = 0{,}9461$ (valeur 0,946083).

Réponse. $\mathrm{Si}(x) = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$, $\mathrm{Si}(1) \approx 0{,}9461$.

Correction de l'exercice 7 – Développement par une équation différentielle

a) Quotient de deux fonctions impaire et paire. $f' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$, d'où $(1-x^2)f' = 1 + xf$.

b) Avec $y = \sum a_n x^n$: $(1-x^2)y' - xy = \sum_n ((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1})x^n = 1$. Le coefficient constant donne $a_1 = 1$, et pour $n \geq 1$:

$$(n+1)a_{n+1} = n a_{n-1}$$

soit, pour $n = 2k+2$, $(2k+3)a_{2k+3} = (2k+2)a_{2k+1}$ (les coefficients pairs sont nuls).

c) Par produit télescopique, $a_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$. Le rapport $\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}} \to 1$: rayon 1. La somme g et f sont solutions du même problème de Cauchy linéaire sur $]-1, 1[$ (coefficient $1 - x^2$ non nul), donc $f = g$.

Réponse. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k \geq 0} \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, rayon 1.

Correction de l'exercice 8 – Une équation différentielle et la gaussienne

a) $y'' = \sum (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$, $xy' = \sum n a_n x^n$. Le coefficient de x^n donne $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$.

b) $a_1 = 0$ entraîne $a_{2k+1} = 0$. Et $a_0 = 1$:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$$

Rayon infini (rapport $\to 0$).

c) $y = \sum \frac{(-x^2/2)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Vérification : $y' = -xy$, $y'' = -y + x^2 y$, et $y'' + xy' + y = -y + x^2 y - x^2 y + y = 0$ ✓.

Réponse. $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$, $y = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Correction de l'exercice 9 – La fonction de Bessel d'ordre zéro

a) $xy'' = \sum n(n-1)a_n x^{n-1}$, $y' = \sum n a_n x^{n-1}$, $xy = \sum a_{n-1} x^n$. Le coefficient de x^n ($n \geq 0$) : $(n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$, soit

$$(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

(avec $a_{-1} = 0$: pour $n = 0$, $a_1 = 0$).

b) Les impairs sont nuls ; $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2}$ donne $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$. Rayon infini.

c) $J_0(1) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{64} - \frac{1}{2304} + \cdots \approx 0{,}7652$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $J_0(x) = \sum \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k}$, rayon infini, $J_0(1) \approx 0{,}7652$.

Correction de l'exercice 10 – Premiers coefficients de la tangente

a) $\tan' = \sum (2k+1) t_{2k+1} x^{2k}$ et $\tan^2 = \sum_m \left(\sum_{i+j=m} t_{2i+1} t_{2j+1} \right) x^{2m+2}$. On identifie le coefficient de x^{2k+2}.

b) $t_1 = 1$ (coefficient constant), puis

$$t_3 = \frac{t_1^2}{3} = \frac{1}{3}, \qquad t_5 = \frac{2 t_1 t_3}{5} = \frac{2}{15}, \qquad t_7 = \frac{2 t_1 t_5 + t_3^2}{7} = \frac{\frac{4}{15} + \frac{1}{9}}{7} = \frac{17}{315}$$

c) $0{,}3 + 0{,}009 + 0{,}000324 + 0{,}0000118 \approx 0{,}309336$, contre $\tan 0{,}3 = 0{,}309336$ ✓.

Réponse. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$

Correction de l'exercice 11 – Une fonction lisse non développable

a) $P_0 = 1$; si $f^{(n)} = P_n(1/x) \mathrm{e}^{-1/x^2}$, on dérive : $f^{(n+1)} = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'(1/x) + \frac{2}{x^3} P_n(1/x) \right) \mathrm{e}^{-1/x^2}$, de la forme voulue avec $P_{n+1}(u) = -u^2 P_n'(u) + 2u^3 P_n(u)$.

b) Pour tout polynôme P, $P(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2} \to 0$ en 0 (croissances comparées, $u = \frac{1}{x}$). Par récurrence et le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est continue en 0 avec

$$f^{(n)}(0) = 0$$

c) Si f était développable, on aurait $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ au voisinage de 0, alors que $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Non développable.

Réponse. $f \in C^\infty$, toutes les dérivées nulles en 0, mais $f \neq 0$: pas de DSE.

Correction de l'exercice 12 – Décomposition en éléments simples

a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ et $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$.

b) $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$ ($|x| < 1$) et $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \sum \frac{x^n}{2^n}$ ($|x| < 2$), donc

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n, \qquad R = 1$$

c) $f^{(10)}(0) = 10! \left(1 - 2^{-11} \right) = 10! \cdot \frac{2047}{2048}$.

Réponse. $f = \sum (1 - 2^{-n-1}) x^n$, $R = 1$, $f^{(10)}(0) = 10! \, \frac{2047}{2048}$.

Correction de l'exercice 13 – Intégrale de la gaussienne en série

a) $\mathrm{e}^{-t^2} = \sum \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$, intégration terme à terme :

$$E(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \qquad R = +\infty$$

b) En $x = 1$: série alternée à termes décroissants $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \cdots$. Le terme $\frac{1}{1320} \approx 7{,}6 \times 10^{-4} < 10^{-3}$: cinq termes suffisent, $E(1) \approx 0{,}7475$ (valeur 0,74682).

c) Pour $x = 5$, les termes $\frac{5^{2k+1}}{k!(2k+1)}$ croissent énormément avant de décroître (jusqu'à plus

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de 5×10^{8}) : compensations catastrophiques en calcul approché, alors que $E(5)\approx\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse. $E(x)=\sum\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$, $E(1)\approx0{,}747$.

Correction de l’exercice 14 – Cosinus hyperbolique fois cosinus

a) $\operatorname{ch}((1+i)x)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}(ix)+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(ix)=\operatorname{ch}x\cos x+i\operatorname{sh}x\sin x$.

b) $\operatorname{ch}((1+i)x)=\sum_k\frac{(1+i)^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$ et $(1+i)^2=2i$: $(2i)^k$ est réel si et seulement si k est pair, $k=2m$, avec $(2i)^{2m}=(-4)^m$. Donc

$$\operatorname{ch}x\cos x=\sum_{m\geq0}\frac{(-4)^m x^{4m}}{(4m)!}$$

c) $\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)$: coefficient de x^4, $\frac{1}{24}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=-\frac{1}{6}$, et $\frac{-4}{24}=-\frac{1}{6}$ ✓.

Réponse. $\operatorname{ch}x\cos x=\sum\frac{(-4)^m}{(4m)!}x^{4m}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : carré de l’arc sinus et une série remarquable

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x)^2=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2f(x)$.

b) On intègre terme à terme (même rayon, $(\arcsin 0)^2=0$) :
$(\arcsin x)^2=\sum_{k\geq0}\frac{2\cdot4^k(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2}$. Avec $n=k+1$: $\frac{2\cdot4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}=\frac{4^n}{2n^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, d’où

$$(\arcsin x)^2=\frac{1}{2}\sum_{n\geq1}\frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}$$

c) En $x=\frac{1}{2}$: $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$.

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{180}=0{,}54722$, contre $\frac{\pi^2}{18}\approx0{,}54831$ (convergence géométrique de raison $\frac{1}{4}$).

Réponse. $(\arcsin x)^2=\frac{1}{2}\sum\frac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}$, donc $\sum\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}=\frac{\pi^2}{18}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).