# Plaquette 1 – Rayon de convergence, développements usuels et fonctions génératrices

## Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

### Boîte à outils

**Rayon de convergence.** Pour $\sum a_n z^n$, il existe un unique $R \in [0\,;+\infty]$ tel que la série converge **absolument** pour $|z| < R$ et diverge **grossièrement** pour $|z| > R$.

- **Règle de d'Alembert** : si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.
- **Règle de Cauchy** : si $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.
- **Comparaison** : $|a_n| \leq |b_n|$ entraîne $R_a \geq R_b$ ; si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
- La convergence est **normale sur tout compact** du disque ouvert de convergence, donc la somme y est **continue**.

**Régularité.** Sur $]-R\,;R[$, la somme $S$ est de classe $C^\infty$ et l'on peut **dériver et intégrer terme à terme**, sans changer le rayon :

$$S'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \qquad \int_0^x S = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

De plus $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$ — les coefficients sont **uniques**.

**Développements usuels** (avec leur rayon).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}\ (R=\infty) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n\ (R=1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\ (R=1) \qquad \arctan x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ (R=1)$$

$$\cos x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin x = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (R=\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n\ (R=1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N})$$

## Correction de l'exercice 1 – Rayon par d'Alembert

**Première série** : $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{3}$$

— Donc $R = 3$.

**Seconde série** : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \to 0$, donc $R = +\infty$.

- **Contrôle de la première** : en $x = 3$, le terme général vaut $n^2 \not\to 0$ — divergence grossière, cohérent avec $R = 3$ ✓
- **Retenir** : un facteur **polynomial** ne change pas le rayon ; seul compte le comportement **géométrique** ou **factoriel**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $R = 3$ et $R = +\infty$.

## Correction de l'exercice 2 – Rayon par comparaison

— **Encadrement** : $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ pour tout $n$.
— **Minoration du rayon** : $|a_n| \leq 3$, et $\sum 3x^n$ a pour rayon 1, donc $R \geq 1$.
— **Majoration** : $|a_n| \geq 1$, et $\sum x^n$ a pour rayon 1, donc $R \leq 1$.
— **Conclusion** : $R = 1$.
— **Méthode générale** : un coefficient **encadré entre deux constantes strictement positives** donne le même rayon que la série géométrique, soit $R = 1$.
— **Contrôle** : pour $|x| > 1$, $|a_n x^n| \geq |x|^n \to +\infty$ — divergence grossière ✓ ; pour $|x| < 1$, majoration par $3|x|^n$, terme d'une géométrique convergente ✓

**Réponse.** $R = 1$.

## Correction de l'exercice 3 – Développement d'une fraction rationnelle

**Décomposition en éléments simples** : on cherche $\dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1-2x}$.

— En multipliant par $1 - x$ et en évaluant en $x = 1$ : $a = \dfrac{1}{1-2} = -1$.
— En multipliant par $1 - 2x$ et en évaluant en $x = \frac{1}{2}$ : $b = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.
— **Contrôle en** $x = 0$ : $-1 + 2 = 1 = f(0)$ ✓
— **Développement** : pour $|x| < \dfrac{1}{2}$,

$$f(x) = -\sum_{n \geq 0} x^n + 2\sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \sum_{n \geq 0} \left(2^{n+1} - 1\right) x^n$$

— **Rayon** : le plus petit des deux, soit $R = \dfrac{1}{2}$ (le pôle le plus proche de l'origine est $\frac{1}{2}$).
— **Contrôle des premiers coefficients** : 1, 3, 7, 15 ; et le produit $\left(1 + x + x^2\right)\left(1 + 2x + 4x^2\right) = 1 + 3x + 7x^2 + \ldots$ ✓

**Réponse.** $f(x) = \sum \left(2^{n+1} - 1\right) x^n$, $R = \dfrac{1}{2}$.

## Correction de l'exercice 4 – Développement par dérivation

— On part de $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ pour $|x| < 1$.
— La **dérivation terme à terme** est licite dans le disque ouvert :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$$

— **Rayon** : inchangé, $R = 1$.
— **Contrôle** : $\left(\sum x^n\right)^2$ donne par produit de Cauchy le coefficient $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ ✓ — cohérent avec $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2$.
— **Application** : $\sum_{n \geq 0} \dfrac{n+1}{2^n} = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$.

**Réponse.** $\sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$, $R = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 5 – Développement par intégration

— **Point de départ** : $\dfrac{1}{1+t^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}$ pour $|t|<1$.

— **Intégration terme à terme** de 0 à $x$ (licite pour $|x|<1$) :

$$\arctan x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

— **En** $x=1$ : la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ est **alternée convergente** ; le théorème d'Abel radial permet de passer à la limite :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

— C'est la **formule de Leibniz**.

— **Convergence très lente** : après 1000 termes, l'erreur est encore de l'ordre de $\dfrac{1}{2000} = 5\times 10^{-4}$ — inutilisable en pratique.

— **Formules efficaces** : on préfère $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ (Machin), où les arguments sont petits.

**Réponse.** $\arctan x = \sum \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\dfrac{\pi}{4} = \sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

## Correction de l'exercice 6 – Somme d'une série entière

On part de $\sum_{n\geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ et on applique deux fois l'opérateur $x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

— **Première fois** : $\sum_{n\geq 1} n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

— **Seconde fois** : on dérive $\dfrac{x}{(1-x)^2}$,

$$\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

puis on multiplie par $x$ :

$$\sum_{n\geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

— **Contrôle en** $x=\dfrac{1}{2}$ : la formule donne $\dfrac{0{,}5\times 1{,}5}{0{,}125} = 6$.

— **Vérification numérique** : $0{,}5 + 1 + 1{,}125 + 1 + 0{,}78125 + \dots$, la somme des 10 premiers termes vaut 5,857 — convergence vers 6 ✓

— **Interprétation probabiliste** : cela permet de calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ pour une loi **géométrique**, donc sa variance.

**Réponse.** $\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

## Correction de l'exercice 7 – Suite récurrente par série génératrice

On traduit la récurrence sur la série.

— $F(x) = u_0 + u_1 x + \sum_{n\geq 0} u_{n+2} x^{n+2} = 1 + x + \sum_{n\geq 0}(u_{n+1}+u_n)x^{n+2}$.

— Or $\sum_{n\geq 0} u_{n+1}x^{n+2} = x(F(x)-u_0) = x(F(x)-1)$ et $\sum_{n\geq 0} u_n x^{n+2} = x^2 F(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Équation** : $F = 1 + x + xF - x + x^2F$, soit $F\left(1 - x - x^2\right) = 1$.

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

— **Rayon** : les racines de $1 - x - x^2$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; la plus proche de 0 est $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$, donc $R = \frac{1}{\varphi}$ où $\varphi$ est le nombre d'or.

— **Contrôle des coefficients** : $\frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$ ✓ (les termes de Fibonacci).

— **Formule de Binet** : la décomposition en éléments simples de $F$ redonne $u_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

**Réponse.** $F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$, de rayon $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

## Correction de l'exercice 8 – Équation différentielle par séries

On pose $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, donc $y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$.

— L'équation $y' = 2xy$ s'écrit $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n \geq 1} 2a_{n-1} x^n$.

— **Identification** : $a_1 = 0$, et pour $n \geq 1$ : $(n+1) a_{n+1} = 2a_{n-1}$.

— Avec $a_0 = 1$ : les coefficients d'indice **impair** sont tous nuls ; et $a_{2k+2} = \frac{2a_{2k}}{2k+2} = \frac{a_{2k}}{k+1}$.

— Par récurrence : $a_{2k} = \frac{1}{k!}$.

— **Solution** : $y = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{k!} = \mathrm{e}^{x^2}$, de rayon **infini**.

— **Vérification directe** : $\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ ✓ et $y(0) = 1$ ✓

— **Intérêt de la méthode** : elle fonctionne même quand la solution n'est pas exprimable avec les fonctions usuelles (équations d'Airy, de Bessel).

**Réponse.** $y = \mathrm{e}^{x^2}$, de rayon infini.

## Correction de l'exercice 9 – Comportement au bord

— **Rayon** : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$, donc $R = 1$.

— **En** $x = 1$ : la série est $\sum \frac{1}{n}$, **harmonique** : elle **diverge**.

— **En** $x = -1$ : la série est $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, **alternée** vérifiant le critère spécial : elle **converge** (vers $-\ln 2$).

— **Conclusion** : le comportement au bord peut **différer** d'un point à l'autre du cercle de convergence — le rayon ne dit rien sur ce qui s'y passe.

— **Somme** : pour $|x| < 1$, la série vaut $-\ln(1 - x)$ ; en $x = -1$ on retrouve bien $-\ln 2$ ✓

— **Cohérence** : $-\ln(1 - x) \to +\infty$ quand $x \to 1^-$, ce qui explique la divergence en 1.

**Réponse.** Diverge en $x = 1$ (harmonique), converge en $x = -1$ (alternée).

## Correction de l'exercice 10 – Produit de Cauchy de séries entières

C'est le **produit de Cauchy** de $\sum \frac{x^n}{n!}$ (rayon $\infty$) et $\sum x^n$ (rayon 1).

— Le coefficient d'ordre $n$ du produit vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

— **Développement** : $\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n$, de rayon $R = 1$ (le minimum des deux).

— **Premiers coefficients** : 1, 2, 2,5, 2,6$\overline{6}$, 2,708… — ils tendent vers e ≈ 2,71828.

— **Contrôle** : $c_1 = 1 + 1 = 2$ ; et en développant $\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 + x + x^2)$, le coefficient de $x$ est bien $1 + 1 = 2$ ✓

— **Interprétation combinatoire** : $n!\, c_n$ est le nombre d'**arrangements** de sous-ensembles d'un ensemble à $n$ éléments.

**Réponse.** $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n$, de rayon 1.

## Correction de l'exercice 11 – Développement en série entière d'une composée

**Astuce de factorisation** : $1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$ pour $x \neq 1$.

— Donc pour $|x| < 1$ :

$$f(x) = \ln\left(1 - x^3\right) - \ln(1 - x)$$

— **Développements connus** : $\ln(1 - t) = -\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$.

$$f(x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

— **Coefficients** : celui de $x^m$ vaut $\frac{1}{m}$ si $3 \nmid m$, et $\frac{1}{m} - \frac{3}{m} = -\frac{2}{m}$ si $3 \mid m$.

— **Rayon** : $R = 1$.

— **Contrôle** : $f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ ; par ailleurs $\ln(1 + u)$ avec $u = x + x^2$ donne $u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} = x + x^2 - \frac{x^2 + 2x^3}{2} + \frac{x^3}{3} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}$ ✓

**Réponse.** $f(x) = \sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m} - 3\sum_{3 \mid m} \frac{x^m}{m}$, $R = 1$.

## Correction de l'exercice 12 – Rayons de séries lacunaires

a) Avec $u = x^2$ : $\sum 2^n u^n$ converge si et seulement si $|u| < \frac{1}{2}$. Donc la série converge pour $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et diverge grossièrement pour $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Pour $|x| < 1$, $|x|^{n^2} \leq |x|^n$ : convergence. Pour $|x| \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0. Donc $R = 1$.

c) Les termes pairs $x^{2k}$ sont bornés pour $|x| \leq 1$ ; les termes impairs $2^k x^{2k+1} = x(2x^2)^k$ sont bornés si et seulement si $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. La suite $(a_n x^n)$ est donc bornée pour $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et non bornée pour $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ : $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (lemme d'Abel).

**Réponse.** a) $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; b) $R = 1$ ; c) $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 13 – Le binôme généralisé

a) $a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1} \to 1$ : par d'Alembert, $R = 1$.

b) $g(x) = f(x)(1+x)^{-\alpha}$ vérifie $g' = (1+x)^{-\alpha-1}((1+x)f' - \alpha f) = 0$ et $g(0) = a_0 = 1$, donc $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

c) Avec $\alpha = \frac{1}{2}$ : $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6} = \frac{1}{16}$, $a_4 = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{24} = -\frac{5}{128}$ :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

**Réponse.** $R = 1$, somme $(1+x)^{\alpha}$ ; $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$.

## Correction de l'exercice 14 – Développement de l'arc sinus

a) Binôme généralisé avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ : $\binom{-1/2}{n}(-1)^n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ (en complétant le produit des impairs par les pairs).

b) $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n}$ (rayon 1), et l'on intègre terme à terme sur $]-1,1[$ ($\arcsin 0 = 0$) :

$$\arcsin x = \sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n (2n+1)} x^{2n+1}, \qquad R = 1$$

c) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$. En $x = \frac{1}{2}$ : $0{,}5 + 0{,}02083 + 0{,}00234 = 0{,}52317$, contre $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52360$ (les termes suivants comblent l'écart).

**Réponse.** $\arcsin x = \sum \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n+1)} x^{2n+1}$, $R = 1$ ; $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : somme et valeur remarquable

a) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2} \to 0$, donc $R = +\infty$.

b) **Astuce** : on multiplie par $x$ pour reconstituer l'exponentielle.

$$xS(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{m\geq 1} \frac{x^m}{m!} = \mathrm{e}^x - 1$$

- Donc pour $x \neq 0$ : $S(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
- **En 0** : $S(0) = \frac{1}{1!} = 1$, ce qui est bien la limite de $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ — la fonction se **prolonge par continuité**, comme le garantit la série entière.
- **Valeur demandée** : $S(1) = \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}71828$.
- **Contrôle numérique** : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 1{,}71667$, et le terme suivant vaut $\frac{1}{720} \approx 0{,}00139$ ✓
- **Ce que l'exercice illustre** : multiplier ou diviser par une puissance de $x$ est le geste standard pour **décaler les indices** et se ramener à un développement connu.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** a) $R = +\infty$ · b) $S(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ et $S(1) = \mathrm{e} - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).