Plaquette 2 – Rayon de convergence : méthodes de calcul et propriétés

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lemme d'Abel. Si $(a_n r^n)$ est bornée, alors $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < r$.

Caractérisations. $|x| < R \Rightarrow$ convergence absolue ; $|x| > R \Rightarrow$ divergence grossière ; sur le cercle $|x| = R$, tout peut arriver.

Règles.

— $R\left(\sum n a_n x^n\right) = R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right)$.

— $R(a+b) \geq \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$; $R(\text{Cauchy}) \geq \min(R_a, R_b)$.

— Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, alors

$$R = \frac{1}{\ell} \quad (\text{avec } R = +\infty \text{ si } \ell = 0,\ R = 0 \text{ si } \ell = +\infty)$$

Correction de l'exercice 1 – Rayons par la règle de d'Alembert

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$, donc $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$:

$$R = \frac{1}{4}$$

c) Le rapport est l'inverse du précédent, de limite $\frac{1}{4}$: $R = 4$.

Réponse. a) $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$; b) $R = \frac{1}{4}$; c) $R = 4$.

Correction de l'exercice 2 – Rayon par équivalent et étude au bord

a) $a_n = \mathrm{e}^{\ln n / n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}$. Or $\sum \frac{\ln n}{n} x^n$ a pour rayon 1 (rapport des coefficients $\to 1$), et des coefficients équivalents donnent le même rayon : $R = 1$.

b) En $x = 1$: $a_n \geq \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$ (car $\mathrm{e}^u - 1 \geq u$) : divergence.

c) En $x = -1$: $\sum (-1)^n a_n$, avec (a_n) décroissante à partir du rang 3 et

$$a_n \sim \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$$

converge par le critère spécial. Le domaine de convergence est $[-1, 1[$.

Réponse. $R = 1$; divergence en 1, convergence en -1.

Correction de l'exercice 3 – Coefficients irréguliers

a) Les coefficients valent 0 ou 1, une infinité valant 1 (infinité des nombres premiers) : $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leq 1$, donc $R = 1$.

b) $1 \leq d(n) \leq n$, donc

$$R\left(\sum n x^n\right) \leq R\left(\sum d(n) x^n\right) \leq R\left(\sum x^n\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

et les deux bornes valent 1 : $R = 1$.

c) Pour n pair, le terme vaut $\left(\frac{x}{3}\right)^n$; pour n impair, x^n. La suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leq 1$ (à cause des termes impairs) : $R = 1$.

Réponse. Les trois rayons valent 1.

Correction de l'exercice 4 – Démonstration du lemme d'Abel

a) $|a_n x^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \leq M\left(\frac{|x|}{r}\right)^n$.

b) Série géométrique de raison $\frac{|x|}{r} < 1$: convergence absolue. Sur $\{|x| \leq \rho\}$,

$$\sup_{|x| \leq \rho} |a_n x^n| \leq M\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$$

terme d'une série convergente : convergence normale.

c) Si $\sum a_n x_0^n$ converge, son terme général tend vers 0, donc $(a_n x_0^n)$ est bornée : a) et b) s'appliquent avec $r = |x_0|$.

Réponse. Domination par une série géométrique de raison $\frac{|x|}{r}$: convergence absolue, et normale sur tout disque fermé de rayon $< r$.

Correction de l'exercice 5 – Rayon de la série dérivée

a) $|a_n x^n| \leq |n a_n x^n|$ pour $n \geq 1$: si $(n a_n x^n)$ est bornée, $(a_n x^n)$ aussi.

b) $(a_n r^n)$ est bornée (car $r < R$), et $n\left(\frac{|x|}{r}\right)^n \to 0$ (croissances comparées). Donc $(n a_n x^n)$ tend vers 0, est bornée, et

$$R\left(\sum n a_n x^n\right) \geq |x|$$

pour tout $|x| < R$: égalité des rayons.

c) La série $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour série dérivée $\sum a_n x^n$: même rayon R par b).

Réponse. Dérivation et intégration terme à terme conservent le rayon.

Correction de l'exercice 6 – Rayon d'une somme

a) Pour $|x| < \min(R_a, R_b)$, les deux séries convergent, donc leur somme aussi.

b) Pour $R_a < |x| < R_b$: si $\sum (a_n + b_n) x^n$ convergeait, alors $\sum a_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n - \sum b_n x^n$ convergerait, ce qui est exclu ($|x| > R_a$). Donc $R(a+b) \leq R_a$, d'où l'égalité.

c) $a_n = 1$ et $b_n = -1 + 2^{-n}$: $R_a = R_b = 1$, et

$$a_n + b_n = 2^{-n}, \qquad R(a+b) = 2$$

Réponse. $R(a+b) \geq \min(R_a, R_b)$, égalité si $R_a \neq R_b$; exemple 1 et $-1 + 2^{-n}$.

Correction de l'exercice 7 – Rayon d'un produit de Cauchy

a) Pour $|x| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent absolument : le produit de Cauchy converge (absolument) vers le produit.

b) $c_0 = 1$ et $c_n = 1 - 1 = 0$ pour $n \geq 1$: le produit vaut 1, de rayon $+\infty$, alors que $\min(R_a, R_b) = 1$. L'inégalité peut être stricte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$: $\left(\sum x^n\right)^2 = \sum (n+1)x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Et

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \cdots$$

de rayon 1 (coefficients $\to$ e).

Réponse. $R \geq \min(R_a, R_b)$, inégalité stricte possible ($(1-x)\sum x^n = 1$).

Correction de l'exercice 8 – Carrés des coefficients et séries paires

a) $(a_n^2 r^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n r^n)$ l'est. Donc $\sum a_n^2 t^n$ a des termes bornés pour $t = r^2$ avec $r < R$, et non bornés pour $r > R$:

$$R\left(\sum a_n^2 x^n\right) = R^2$$

b) $(a_n x^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n (x^2)^n)$ l'est : il faut $x^2 \leq R$ (au sens des bornes), donc le rayon est $\sqrt{R}$.

c) $\sum \dfrac{u^n}{4^n}$ a pour rayon 4, donc $\sum \dfrac{x^{2n}}{4^n}$ a pour rayon 2. $\sum \dfrac{x^n}{n^2 4^n}$: le rapport des coefficients vaut $\dfrac{n^2}{4(n+1)^2} \to \dfrac{1}{4}$, rayon 4.

Réponse. $R(a_n^2) = R^2$, $R(a_n x^{2n}) = \sqrt{R}$; exemples : rayons 2 et 4.

Correction de l'exercice 9 – Coefficients trigonométriques

a) Si $\cos(n\theta) \to 0$, alors $\cos(2n\theta) \to -1$; mais $(\cos(2n\theta))$ est une suite extraite, qui devrait tendre vers 0 : contradiction.

b) $|a_n| \leq 1$ donne $R \geq 1$; $a_n \not\to 0$ donne $R \leq 1$ (sinon $\sum a_n$ convergerait absolument). En $x = \pm 1$, le terme général ne tend pas vers 0.

c) $\sum \cos(n\theta) x^n = \mathrm{Re} \sum (x\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{Re} \dfrac{1}{1 - x\mathrm{e}^{i\theta}}$, d'où

$$\sum_{n \geq 0} \cos(n\theta) x^n = \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

Réponse. $R = 1$, divergence au bord ; somme $\dfrac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

Correction de l'exercice 10 – Rayon par la racine n-ième

On applique la règle de Cauchy à la série numérique $\sum |a_n x^n|$.

a) $|a_n x^n|^{1/n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n |x| \to \mathrm{e}|x|$: convergence si $|x| < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, divergence grossière si $|x| > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$: $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}$:

$$R = \mathrm{e}$$

c) $|a_n x^n|^{1/n} = \dfrac{|x|}{\ln n} \to 0$ pour tout x : $R = +\infty$.

Réponse. a) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; b) e ; c) $+\infty$.

Correction de l'exercice 11 – Cas extrêmes

a) Pour $x \neq 0$, $\left|\dfrac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n}\right| = (n+1)|x| \to +\infty$: divergence, $R = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\left|\frac{x^n}{n^n}\right|^{1/n} = \frac{|x|}{n} \to 0$: $R = +\infty$.

c) Le rapport $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} \to 1$: $R = 1$. En $x = 1$: $\sum n^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < -1$. En $x = -1$: $\sum (-1)^n n^{\alpha}$ converge absolument si $\alpha < -1$, semi-converge si $-1 \le \alpha < 0$ (critère spécial), diverge grossièrement si $\alpha \ge 0$.

Réponse. a) $R = 0$; b) $R = +\infty$; c) $R = 1$, bord selon α : convergence en 1 ssi $\alpha < -1$, en -1 ssi $\alpha < 0$.

Correction de l'exercice 12 – Comportement au bord : dériver peut détruire la convergence

a) $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ sur $[-1, 1]$: convergence normale, f continue sur $[-1, 1]$.

b) $f'(x) = \sum_{n \ge 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ (rayon 1) : en $x = 1$, série harmonique divergente ; en $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

c) $f''(x) = \sum_{n \ge 2} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$: en $x = -1$, le terme général

$$\frac{n-1}{n}(-1)^{n-2} \longrightarrow 0$$

donc divergence. Le rayon est conservé par dérivation, mais pas la convergence sur le bord.

Réponse. f converge sur $[-1, 1]$; f' seulement sur $[-1, 1[$; f'' sur $]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 13 – Rayon d'une série définie par une récurrence

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$:

$$R = \frac{1}{4}$$

b) $\binom{2n+2}{n+1} / \binom{2n}{n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$, même relation et même premier terme.

c) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+3}{2n+5} \to \frac{1}{2}$: $R = 2$.

Réponse. a) $R = \frac{1}{4}$, $a_n = \binom{2n}{n}$; c) $R = 2$.

Correction de l'exercice 14 – Coefficients encadrés

a) $R\left(\sum n^3 x^n\right) \le R \le R\left(\sum \frac{x^n}{n^2}\right)$ et ces deux rayons valent 1 : $R = 1$.

b) $2^{-n} \le 3^{-n}$ est faux pour $n \ge 1$: impossible. Si $3^{-n} \le |a_n| \le 2^{-n}$, alors

$$2 = R\left(\sum 2^{-n} x^n\right) \le R \le R\left(\sum 3^{-n} x^n\right) = 3$$

et tout rayon de $[2, 3]$ est possible (par exemple $a_n = c^{-n}$, $c \in [2, 3]$).

c) Seulement $R \ge 2$ (le rayon peut être infini, par exemple $a_n = 0$).

Réponse. a) $R = 1$; b) $R \in [2, 3]$; c) $R \ge 2$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : nombres harmoniques

a) $H_n \sim \ln n$, et $\sum \ln n \, x^n$ a pour rayon 1 : $R = 1$.

b) Le coefficient de x^n du produit vaut $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot 1 = H_n$. Les deux séries ont pour rayon 1,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

donc sur $]-1,1[$:

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-\ln(1-x))$$

c) $H_n \to +\infty$: divergence grossière en 1 et en -1.

d) $x = \frac{1}{2}$: $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{1/2} = 2\ln 2$.

Réponse. $R = 1$, $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$, divergence au bord ; $\sum \frac{H_n}{2^n} = 2\ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).