Plaquette 4 – Sommes de séries entières et fonctions génératrices en dénombrement

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sommes de référence ($|x|<1$) :

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad \sum_{n\geq 0}\binom{n+p}{p}x^n=\frac{1}{(1-x)^{p+1}},\qquad \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\ \left(|x|<\frac14\right)$$

— $\sum_{n\geq 0} n(n-1)\cdots(n-p+1)\frac{x^n}{n!}=x^p\mathrm{e}^x$.

Produit de Cauchy et dénombrement. Si $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, alors $C=AB$; si $c_n=\sum_k\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$, c'est le produit des séries génératrices **exponentielles**.

Racines de l'unité. Avec $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$: $\dfrac{f(x)+f(jx)+f(j^2x)}{3}=\sum_k a_{3k}x^{3k}$.

Correction de l'exercice 1 – Une somme par décomposition

a) $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$, donc $\sum\frac{x^n}{n+1}=-\frac{\ln(1-x)}{x}$.

b) $\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$: $\sum\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$.

c) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, et $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n+1}=-\frac{\ln(1-x)}{x}-1$, d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+1)}=-\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+1=1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$$

La série converge normalement sur $[-1,1]$ ($\frac{1}{n(n+1)}$), sa somme est continue en 1 : limite 1, conforme au télescopage $\sum\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Réponse. $\sum\frac{x^n}{n(n+1)}=1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$, de limite 1 en $x=1$.

Correction de l'exercice 2 – Polynôme en n fois exponentielle

a) $\sum\frac{n(n-1)x^n}{n!}=x^2\sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}=x^2\mathrm{e}^x$ et $\sum\frac{nx^n}{n!}=x\mathrm{e}^x$.

b) $(x^2+x)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=(x+1)^2\mathrm{e}^x$.

c) En $x=1$:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n+1}{n!}=4\mathrm{e}$$

Pour $P(X=n)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}$, $E(X^2)=\mathrm{e}^{-1}\sum\frac{n^2}{n!}=\mathrm{e}^{-1}\cdot 2\mathrm{e}=2$.

Réponse. $\sum\frac{n^2+n+1}{n!}x^n=(x+1)^2\mathrm{e}^x$; en 1 : $4\mathrm{e}$; $E(X^2)=2$.

Correction de l'exercice 3 – Extraire un terme sur trois

a) Si $3\mid n$, $j^n=1$. Sinon $j^n\neq 1$ et $1+j^n+j^{2n}=\dfrac{1-j^{3n}}{1-j^n}=0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\dfrac{e^{x}+e^{jx}+e^{j^2x}}{3}=\sum_n \dfrac{1+j^n+j^{2n}}{3}\cdot\dfrac{x^n}{n!}=\sum_k \dfrac{x^{3k}}{(3k)!}$. Avec $j=-\tfrac12+i\tfrac{\sqrt3}{2}$ et $j^2=\bar j$:

$$e^{jx}+e^{\bar j x}=2\mathrm{Re}\,e^{jx}=2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt3\,x}{2}$$

c) $\dfrac{e+2e^{-1/2}\cos\frac{\sqrt3}{2}}{3}\approx 1{,}16806$ ($=1+\frac16+\frac{1}{720}+\cdots$).

Réponse. $\sum \dfrac{x^{3k}}{(3k)!}=\dfrac{e^{x}+2e^{-x/2}\cos(\sqrt3\,x/2)}{3}$; en 1 : $\approx 1{,}16806$.

Correction de l’exercice 4 – Série logarithmique trigonométrique

a) $\sum_{n\ge1}\cos(n\theta)x^{n-1}=\mathrm{Re}\sum_{n\ge1}e^{in\theta}x^{n-1}=\mathrm{Re}\dfrac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}$, et en multipliant par le conjugué $1-xe^{-i\theta}$:

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}-x}{1-2x\cos\theta+x^2}=\frac{\cos\theta-x}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

b) La dérivée de $-\tfrac12\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$ est la même fonction, et les deux valent 0 en $x=0$.

c) $\sum_{n\ge1}\dfrac{\cos(n\theta)}{n}=-\tfrac12\ln(2-2\cos\theta)=-\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$. Pour $\theta=\frac{\pi}{3}$: $\sum\dfrac{\cos(n\pi/3)}{n}=-\ln 1=0$.

Réponse. $\sum\dfrac{\cos n\theta}{n}x^n=-\tfrac12\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$; en $x=1$: $-\ln(2\sin\frac{\theta}{2})$.

Correction de l’exercice 5 – Récurrence linéaire par série génératrice

a) Par récurrence, $|u_n|\le 4^n$, donc le rayon est $\ge\frac14$. On multiplie la récurrence par x^{n+2} et l’on somme :

$$U(x)-x=3x\,U(x)-2x^2U(x)$$

b) $\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}=\dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$ (vérifier en réduisant au même dénominateur), d’où $u_n=2^n-1$.

c) $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=3\cdot1-0=3=2^2-1$, $u_3=9-2=7=2^3-1$ ✓.

Réponse. $U(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$, $u_n=2^n-1$.

Correction de l’exercice 6 – Les nombres de Catalan

a) Par récurrence forte, $c_k\le 4^k$ pour $k\le n$ donne seulement $c_{n+1}\le(n+1)4^n$; on montre plutôt $c_n\le\binom{2n}{n}\le 4^n$ (c’est le nombre de chemins de Dyck, inclus dans celui des chemins de longueur $2n$). Le rayon est donc $\ge\frac14$, et le produit de Cauchy donne $C^2=\sum c_{n+1}x^n$, d’où $xC^2=C-1$.

b) Pour $x\neq0$, $C=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$; seul le signe $-$ donne une limite finie ($c_0=1$) en 0.

c) $1-\sqrt{1-4x}=2\sum_{n\ge1}\frac1n\binom{2n-2}{n-1}x^n$, donc

$$C(x)=\sum_{n\ge1}\frac1n\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1},\qquad c_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Premiers termes : $1,1,2,5,14,42$.

Réponse. $C(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ et $c_n=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $(1,1,2,5,14,42,\ldots)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Dérangements

a) Une permutation dont l'ensemble des points fixes a $n-k$ éléments se décrit par le choix de ces points ($\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ façons) et un dérangement des k autres.

b) $d_n \le n!$ assure un rayon ≥ 1. a) est un produit de Cauchy de séries exponentielles :

$$\sum_n \frac{n!}{n!}x^n = \left(\sum \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum d_k \frac{x^k}{k!}\right), \quad \text{soit} \quad \frac{1}{1-x} = \mathrm{e}^x D(x)$$

c) $D(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$, produit de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ et $\sum x^n$: $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k \le n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \mathrm{e}^{-1}$. Ainsi $d_4 = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9$.

Réponse. $D(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$, $d_n = n!\sum_{k \le n} \frac{(-1)^k}{k!}$, proportion $\to \frac{1}{\mathrm{e}}$ ($d_4 = 9$).

Correction de l'exercice 8 – Les nombres de Bell

a) $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 5$, $b_4 = 15$, $b_5 = 52$.

b) $B'(x) = \sum b_{n+1}\frac{x^n}{n!}$ et $\mathrm{e}^x B(x) = \sum_n \left(\sum_k \binom{n}{k} b_k\right)\frac{x^n}{n!}$ (produit de séries exponentielles) : égalité par la récurrence.

c) $\left(B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\right)' = 0$ et $B(0) = 1$, donc $B = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$. Puis

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k \ge 0} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_k \frac{1}{k!} \sum_n \frac{k^n x^n}{n!}$$

et le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ donne $b_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_k \frac{k^n}{k!}$.

Réponse. b_n : $1, 1, 2, 5, 15, 52$; $B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$; $b_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum \frac{k^n}{k!}$.

Correction de l'exercice 9 – Rendre la monnaie

a) Le produit $\left(\sum x^a\right)\left(\sum x^{2b}\right)\left(\sum x^{5c}\right)$ a pour coefficient de x^n le nombre de triplets (a, b, c) avec

$$a + 2b + 5c = n$$

b) $c = 0$: $b \in \{0, \dots, 5\}$, 6 façons ; $c = 1$: $a + 2b = 5$, $b \in \{0, 1, 2\}$, 3 façons ; $c = 2$: 1 façon. Total $p_{10} = 10$.

c) Les solutions de $a + 2b = n$ correspondent à $b \in \{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ façons, coefficient de x^n dans $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

Réponse. Série génératrice $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$; $p_{10} = 10$; avec 1 et 2 : $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Correction de l'exercice 10 – Valeurs numériques de séries par les dérivées

a) $\sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, en $x = \frac{1}{3}$: $\frac{1/3}{4/9} = \frac{3}{4}$.

b) $(n+1)^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)$, et $\sum (n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$, $\sum (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$:

$$\sum (n+1)^2 x^n = \frac{2 - (1-x)}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

En $x = \frac{1}{2}$: $\frac{3/2}{1/8} = 12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Vérification : $\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4} = x(1+4x+\cdots)(1+4x+\cdots) = x + 8x^2 + \cdots$ et $2^3 = 8$ ✓. En $x = \frac{1}{2}$: $\frac{\frac{1}{2}\left(1+2+\frac{1}{4}\right)}{1/16} = 26$.

Réponse. a) $\frac{3}{4}$; b) 12 ; c) 26.

Correction de l'exercice 11 – Coefficients binomiaux centraux

a) $(1-4x)^{-1/2} = \sum \binom{-1/2}{n}(-4x)^n$ et $\binom{-1/2}{n}(-4)^n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!}4^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

b) $x = \frac{1}{8}$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{8^n} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

c) Le carré de $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ vaut $\frac{1}{1-4x} = \sum 4^n x^n$; le produit de Cauchy donne l'identité.

Réponse. $\sum \binom{2n}{n} x^n = (1-4x)^{-1/2}$; $\sum \binom{2n}{n} 8^{-n} = \sqrt{2}$; convolution $= 4^n$.

Correction de l'exercice 12 – Mots binaires sans deux 1 consécutifs

a) Un mot de longueur $n+2$ commence par 0 (suivi d'un mot valide de longueur $n+1$) ou par 10 (suivi d'un mot valide de longueur n).

b) En sommant la récurrence : $A(x) - 1 - 2x = x(A(x)-1) + x^2 A(x)$, d'où

$$A(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$$

c) $a_n = F_{n+2}$ (Fibonacci, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$) : $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, et $a_{10} = F_{12} = 144$. Par la formule de Binet, $a_n \sim \frac{\varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Réponse. $A(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$, $a_n = F_{n+2}$, $a_{10} = 144$.

Correction de l'exercice 13 – Suites récurrentes non homogènes

a) $\sum_{n\geq 0} u_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum u_n x^n + \sum n x^{n+1}$, et $\sum_{n\geq 0} n x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$.

b) $(1-2x)U = 1 + \frac{x^2}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2}$. Décomposition :

$$U(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

(vérification : $\frac{2(1-x)^2 - (1-2x)}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$ ✓).

c) $u_n = 2^{n+1} - (n+1)$: $u_1 = 2$ ($= 2\cdot 1 + 0$ ✓), $u_2 = 5$ ($= 2\cdot 2 + 1$ ✓), $u_3 = 12$ ($= 2\cdot 5 + 2$ ✓).

Réponse. $U(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}$, $u_n = 2^{n+1} - n - 1$.

Correction de l'exercice 14 – Nombre de solutions entières d'une équation

a) a apporte le facteur $1 + x + x^2$, b et c chacun $\frac{1}{1-x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum (n+1)x^n$, donc pour $n \geq 2$:

$$s_n = (n+1) + n + (n-1) = 3n$$

c) $n = 3$: $a = 0$ donne 4 couples (b, c) avec $b + c = 3$; $a = 1$: 3 ; $a = 2$: 2. Total $9 = 3 \times 3$ ✓.

Réponse. $\sum s_n x^n = \frac{1 + x + x^2}{(1-x)^2}$, $s_n = 3n$ pour $n \geq 2$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : les nombres de Bernoulli

a) Le coefficient de x^{n+1} du produit vaut $\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n+1-k)!}$; il vaut 1 pour $n = 0$ (d’où $B_0 = 1$) et 0 pour $n \geq 1$. On multiplie par $(n+1)!$.

b) $n = 1$: $1 + 2B_1 = 0$, $B_1 = -\frac{1}{2}$. $n = 2$: $1 - \frac{3}{2} + 3B_2 = 0$, $B_2 = \frac{1}{6}$. $n = 3$: $1 - 2 + 1 + 4B_3 = 0$, $B_3 = 0$. $n = 4$: $1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 5B_4 = 0$, soit

$$B_4 = -\frac{1}{30}$$

c) $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$, et changer x en $-x$ laisse invariant (numérateur et dénominateur changent de signe). Une fonction paire a des coefficients impairs nuls : $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$ (le terme $\frac{x}{2}$ compense exactement $B_1 x$).

Réponse. $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, et $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).