Plaquette 5 – Bord du disque, analyticité et problèmes de synthèse

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Sur le **bord** du disque de convergence, le **théorème d'Abel radial** permet de calculer $\sum a_n$ comme limite de $\sum a_n x^n$ quand $x \to 1^-$, dès que $\sum a_n$ converge (la réciproque est fausse). La **rigidité** des séries entières (unicité des coefficients, zéros isolés) identifie une fonction à partir de quelques valeurs ou d'une équation. Les **inégalités de Cauchy**, obtenues en intégrant sur un cercle, majorent les coefficients et donnent le théorème de Liouville. Les problèmes de synthèse combinent ces outils : sommes trigonométriques au bord, équivalents au voisinage de 1, identités fonctionnelles prouvées par dérivation.

Exercice 1 – Le théorème d'Abel radial

Soit $\sum a_n$ convergente, de restes $r_n = \sum_{k>n} a_k$ ($r_{-1} = \sum a_k$).

a) Montrer que pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n = (x-1)\sum_{n\geq 0} r_n x^n$ (transformation d'Abel, $a_n = r_{n-1} - r_n$).

b) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|r_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Montrer que $\left|(x-1)\sum_{n\geq N} r_n x^n\right| \leq \varepsilon$.

c) Conclure.

Exercice 2 – Deux sommes classiques par Abel

a) À l'aide du DSE de arctan et du théorème d'Abel radial, montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

b) Montrer de même que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

c) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le DSE de arctan en $x = 1$?

Exercice 3 – La réciproque d'Abel est fausse

a) Calculer $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$. La série $\sum (-1)^n$ converge-t-elle ?

b) Même question pour $\sum (-1)^n (n+1) x^n$.

c) Si $a_n \geq 0$ et $\sum a_n x^n$ a une limite finie ℓ en 1^-, montrer que $\sum a_n$ converge et vaut ℓ.

Exercice 4 – Zéros isolés et rigidité

Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$, non identiquement nulle.

a) Soit p le plus petit indice avec $a_p \neq 0$. Montrer que $f(x) = x^p g(x)$ avec g continue en 0, $g(0) = a_p \neq 0$.

b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \neq 0$ pour $0 < |x| < \delta$.

c) Application : si $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ pour tout n assez grand, montrer que $f = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Identifier une fonction par ses valeurs

a) Existe-t-il f développable en série entière de rayon $R > 0$ avec $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ pour n grand ? La déterminer.

b) Même question avec $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$.

c) Même question avec $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$.

Exercice 6 – Équations fonctionnelles et séries entières

Déterminer les fonctions f développables en série entière sur $]-R, R[$ ($R > 0$) telles que :

a) $f(2x) = 2f(x)$ pour $|x| < \frac{R}{2}$;

b) $f'(x) = f(2x)$ pour $|x| < \frac{R}{2}$, et $f(0) = 0$;

c) $f(x) + f(-x) = 2\cos x$ et $f(x) - f(-x) = 2\sin x$.

Exercice 7 – Formule de Parseval et inégalités de Cauchy

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ (variable complexe) et $0 < r < R$.

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_n |a_n|^2 r^{2n}$ (développer $f\bar{f}$ et utiliser $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}d\theta = 0$ pour $k \neq 0$).

b) En déduire $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$, où $M(r) = \max_\theta |f(re^{i\theta})|$.

c) Vérifier sur $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $r = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 – Théorème de Liouville

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon infini, bornée sur $\mathbb{C}$ par M.

a) Avec les inégalités de Cauchy, montrer que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.

b) Conclure que f est constante.

c) Application : $z \mapsto \sin z$ est-elle bornée sur $\mathbb{C}$? Et sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 – Équivalents au voisinage du bord

Soient $a_n \sim b_n$ avec $b_n > 0$, $\sum b_n$ divergente, et les deux séries entières de rayon 1.

a) Montrer que $\sum b_n x^n \to +\infty$ quand $x \to 1^-$.

b) Montrer que $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ quand $x \to 1^-$ (découper en $n < N$ et $n \geq N$).

c) En déduire un équivalent de $\sum_{n \geq 2} \ln n \, x^n$ en 1^- (utiliser $\sum H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$).

Exercice 10 – Rayon et singularités complexes

a) Développer $\frac{1}{1+x^2}$ en série entière et donner son rayon.

b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier : pourquoi le rayon est-il fini ?

c) Quel est le rayon du DSE en 0 de $\frac{1}{x^2 - 2x + 5}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Solutions développables d'une équation singulière

On considère $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$.

a) Chercher $y = \sum a_n x^n$ et montrer que $(n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = 0$.

b) En déduire les solutions développables en série entière, et identifier leur somme.

c) Vérifier directement que $y = \dfrac{1}{1-x}$ est solution.

Exercice 12 – Les nombres d'Euler

On admet que $\dfrac{1}{\cos x} = \sum_{n \geq 0} E_{2n} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ au voisinage de 0.

a) Justifier qu'il n'y a que des puissances paires.

b) En écrivant $\cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$, établir $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0$ pour $n \geq 1$.

c) Calculer E_0, E_2, E_4, E_6, et contrôler en $x = 0{,}4$.

Exercice 13 – Une somme trigonométrique au bord

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$.

a) Montrer que $T(x) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} x^n$ vérifie $T'(x) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$ pour $|x| < 1$.

b) En déduire $T(x) = \arctan \dfrac{x - \cos\theta}{\sin\theta} + \arctan \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ pour $\theta \in]0, \pi[$, puis la limite en 1^-.

c) Avec le théorème d'Abel (la série $\sum \dfrac{\sin n\theta}{n}$ converge), en déduire $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} = \dfrac{\pi - \theta}{2}$, et $\sum \dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 14 – Nombre d'involutions

Soit I_n le nombre de permutations σ de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ ($I_0 = 1$).

a) Montrer que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$ (discuter $\sigma(n+1)$).

b) Avec $F(x) = \sum I_n \dfrac{x^n}{n!}$, montrer que $F' = (1+x)F$, et en déduire $F(x) = \mathrm{e}^{x + x^2/2}$.

c) Calculer $I_1, \dots, I_5$.

Exercice 15 – Synthèse : le dilogarithme

Soit $L(x) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ pour $x \in [-1, 1]$.

a) Montrer que L est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ avec $L'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ (et $L'(0) = 1$).

b) Pour $x \in]0, 1[$, montrer que $\varphi(x) = L(x) + L(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ a une dérivée nulle.

c) Déterminer la constante en faisant $x \to 1^-$ (on admet $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$).

d) En déduire $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2 2^n} = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).