Plaquette 3 – Développements en série entière : opérations et équations différentielles

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour développer une fonction en série entière (DSE), on se ramène aux **développements usuels** par opérations : somme, produit de Cauchy, substitution $x \mapsto ax^k$, **dérivation** et **intégration** terme à terme (même rayon), décomposition en éléments simples, passage par l'exponentielle complexe. Quand la fonction vérifie une **équation différentielle linéaire**, on cherche une solution $\sum a_n x^n$, on obtient une **relation de récurrence** sur les a_n, on la résout et on calcule le rayon ; l'unicité de la solution du problème de Cauchy identifie la somme. Attention : une fonction C^∞ n'est pas toujours développable.

Exercice 1 – Une fraction à coefficients périodiques

a) Montrer que $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3}$ pour $x \neq 1$.

b) En déduire le DSE de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ et son rayon.

c) Calculer la dérivée 100-ième de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ en 0.

Exercice 2 – Argument tangente hyperbolique et calcul de ln 2

a) Développer $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ en série entière sur $]-1,1[$.

b) Quelle valeur de x donne $\ln 2$? Majorer le reste après N termes.

c) Calculer $\ln 2$ avec quatre termes et comparer.

Exercice 3 – Exponentielle fois cosinus

a) Écrire $e^x \cos x = \mathrm{Re}\, e^{(1+i)x}$ et en déduire le DSE de $e^x \cos x$.

b) Simplifier le coefficient de x^n à l'aide de $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$.

c) Pour quels n ce coefficient est-il nul ? Vérifier sur le terme en x^2 par un produit de Cauchy.

Exercice 4 – Puissances de fonctions trigonométriques

a) Développer $\cos^2 x$ en série entière (linéariser).

b) Développer $\sin^3 x$ en série entière (utiliser $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$).

c) En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$.

Exercice 5 – Puissances négatives de 1 − x

a) En dérivant deux fois $\dfrac{1}{1-x} = \sum x^n$, développer $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

b) Retrouver ce résultat par le binôme généralisé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Interpréter $\binom{n+2}{2}$ comme le nombre de solutions de $a+b+c=n$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 6 – Sinus intégral

Soit $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Développer $\frac{\sin t}{t}$ (prolongée par 1 en 0) en série entière.

b) En déduire le DSE de Si et son rayon.

c) Calculer $\mathrm{Si}(1)$ à 10^{-4} près en justifiant le nombre de termes.

Exercice 7 – Développement par une équation différentielle

Soit $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$.

a) Montrer que f est impaire et vérifie $(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$, $f(0)=0$.

b) Chercher une solution impaire $\sum a_{2k+1}x^{2k+1}$: établir $a_1=1$ et $(2k+3)a_{2k+3}=(2k+2)a_{2k+1}$.

c) En déduire $a_{2k+1}=\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}$, le rayon, et conclure que f est développable.

Exercice 8 – Une équation différentielle et la gaussienne

On considère $y''+xy'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

a) Chercher $y=\sum a_n x^n$: établir $a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}$.

b) En déduire a_{2k} et a_{2k+1}, et le rayon.

c) Identifier la somme et vérifier.

Exercice 9 – La fonction de Bessel d'ordre zéro

On cherche les solutions développables de $xy''+y'+xy=0$ avec $y(0)=1$.

a) Établir la relation $(n+1)^2a_{n+1}+a_{n-1}=0$ pour $n\geq 1$ et $a_1=0$.

b) En déduire $a_{2k}=\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}$ et le rayon.

c) Donner une valeur approchée de $J_0(1)=\sum a_{2k}$.

Exercice 10 – Premiers coefficients de la tangente

On admet que tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x=\sum_{k\geq 0} t_{2k+1}x^{2k+1}$.

a) À l'aide de $\tan'=1+\tan^2$, établir $(2k+3)t_{2k+3}=\sum_{i+j=k} t_{2i+1}t_{2j+1}$.

b) Calculer t_1,t_3,t_5,t_7.

c) Contrôler numériquement en $x=0{,}3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Une fonction lisse non développable

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer par récurrence que pour $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}$ avec P_n polynôme.

b) En déduire que f est C^∞ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

c) Conclure : f est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 12 – Décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Décomposer f en éléments simples.

b) En déduire le DSE de f en 0 et son rayon.

c) Calculer $f^{(10)}(0)$.

Exercice 13 – Intégrale de la gaussienne en série

Soit $E(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Donner le DSE de E et son rayon.

b) Calculer $E(1)$ à 10^{-3} près.

c) Pourquoi cette méthode est-elle mauvaise pour $E(5)$?

Exercice 14 – Cosinus hyperbolique fois cosinus

a) Montrer que $\mathrm{ch}x\cos x = \mathrm{Re}\mathrm{ch}((1+i)x)$ pour x réel.

b) En déduire que $\mathrm{ch}x\cos x = \sum_{m \geq 0} \dfrac{(-4)^m}{(4m)!}x^{4m}$.

c) Vérifier le terme en x^4 par produit de Cauchy.

Exercice 15 – Synthèse : carré de l'arc sinus et une série remarquable

On reprend $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k \geq 0} \dfrac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ sur $]-1, 1[$.

a) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x)^2 = 2f(x)$.

b) En déduire $(\arcsin x)^2 = \dfrac{1}{2}\sum_{n \geq 1} \dfrac{(2x)^{2n}}{n^2\binom{2n}{n}}$.

c) En déduire $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \dfrac{\pi^2}{18}$.

d) Vérifier numériquement avec trois termes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).