Plaquette 1 – Rayon de convergence, développements usuels et fonctions génératrices

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule le **rayon de convergence** (d'Alembert, Cauchy, comparaison), on développe une fonction en série entière à partir des développements usuels, on **dérive** ou **intègre** terme à terme, et on résout suites et équations différentielles par séries.

Exercice 1 – Rayon par d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{n^2}{3^n} x^n$ et de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 2 – Rayon par comparaison

Déterminer le rayon de convergence de $\sum (2 + \sin n) x^n$.

Exercice 3 – Développement d'une fraction rationnelle

Développer $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$ en série entière et préciser le rayon.

Exercice 4 – Développement par dérivation

Développer $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ en série entière.

Exercice 5 – Développement par intégration

Retrouver le développement de $\arctan x$ et en déduire une formule pour π.

Exercice 6 – Somme d'une série entière

Calculer $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n$ pour $|x| < 1$.

Exercice 7 – Suite récurrente par série génératrice

Soit $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (Fibonacci). Déterminer la série génératrice $F(x) = \sum u_n x^n$.

Exercice 8 – Équation différentielle par séries

Résoudre $y' = 2xy$ avec $y(0) = 1$ en cherchant y sous forme de série entière.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Comportement au bord

Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ en $x = 1$ et $x = -1$.

Exercice 10 – Produit de Cauchy de séries entières

Calculer le développement en série entière de $\frac{e^x}{1-x}$.

Exercice 11 – Développement en série entière d'une composée

Développer $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$ en série entière au voisinage de 0.

Exercice 12 – Rayons de séries lacunaires

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n \geq 0} 2^n x^{2n}$;

b) $\sum_{n \geq 0} x^{n^2}$;

c) $\sum a_n x^n$ avec $a_{2k} = 1$ et $a_{2k+1} = 2^k$.

Exercice 13 – Le binôme généralisé

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

a) Montrer que $\sum a_n x^n$ a pour rayon 1.

b) On admet que sa somme f vérifie $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. En déduire $f(x) = (1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.

c) Écrire les cinq premiers termes du développement de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 14 – Développement de l'arc sinus

a) Développer $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$ en série entière et montrer que le coefficient de u^n vaut $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

b) En déduire le développement de arcsin sur $]-1, 1[$ et son rayon.

c) Donner les trois premiers termes non nuls et contrôler avec $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 15 – Synthèse : somme et valeur remarquable

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

a) Déterminer le rayon.

b) Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles et calculer $S(1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).