Plaquette 2 – Rayon de convergence : méthodes de calcul et propriétés

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Le **rayon de convergence** R de $\sum a_n x^n$ est la borne supérieure des $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)$ soit bornée. Pour le calculer : règle de **d'Alembert** appliquée à la série numérique $\sum |a_n x^n|$ (factorielles, puissances), **comparaison** des coefficients ($|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$, et $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$), **bornitude** directe de $(a_n r^n)$ quand les coefficients sont irréguliers (lacunes, parité, nombres premiers). On utilise ensuite les règles sur la somme, le produit de Cauchy, la dérivée, et l'on étudie séparément le **bord** $|x| = R$.

Exercice 1 – Rayons par la règle de d'Alembert

Déterminer le rayon de convergence de :

a) $\sum \dfrac{n^n}{n!} x^n$;

b) $\sum \binom{2n}{n} x^n$;

c) $\sum \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 2 – Rayon par équivalent et étude au bord

Soit $a_n = n^{1/n} - 1$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que $a_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$, et en déduire le rayon de $\sum a_n x^n$.

b) Étudier la convergence en $x = 1$.

c) Étudier la convergence en $x = -1$ (on admettra que (a_n) décroît à partir du rang 3).

Exercice 3 – Coefficients irréguliers

Déterminer le rayon de convergence de :

a) $\sum_{p \text{ premier}} x^p$;

b) $\sum_{n \geq 1} d(n) x^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n ;

c) $\sum \dfrac{x^n}{(2 + (-1)^n)^n}$.

Exercice 4 – Démonstration du lemme d'Abel

Soit $r > 0$ tel que $|a_n| r^n \leq M$ pour tout n.

a) Pour $|x| < r$, montrer que $|a_n x^n| \leq M \left(\dfrac{|x|}{r} \right)^n$.

b) En déduire la convergence absolue de $\sum a_n x^n$, et même sa convergence normale sur $\{|x| \leq \rho\}$ pour $\rho < r$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que si $\sum a_n x_0^n$ converge, alors $R \geq |x_0|$.

Exercice 5 – Rayon de la série dérivée

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon R.

a) Montrer que $R\left(\sum n a_n x^n\right) \leq R$.

b) Pour $|x| < r < R$, montrer que $n|a_n||x|^n = n\left(\frac{|x|}{r}\right)^n |a_n| r^n$ tend vers 0, et conclure à l'égalité des rayons.

c) En déduire le rayon de $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Exercice 6 – Rayon d'une somme

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayons R_a et R_b.

a) Montrer que $R(a+b) \geq \min(R_a, R_b)$.

b) Si $R_a < R_b$, montrer que $R(a+b) = R_a$.

c) Donner un exemple où $R_a = R_b = 1$ et $R(a+b) = 2$.

Exercice 7 – Rayon d'un produit de Cauchy

a) Montrer que le produit de Cauchy de deux séries entières de rayons R_a, R_b a un rayon $\geq \min(R_a, R_b)$, et que sa somme est le produit des sommes sur ce disque.

b) Calculer le produit de Cauchy de $1 - x$ (polynôme) par $\sum x^n$. Que dire du rayon ?

c) Calculer le produit de Cauchy de $\sum x^n$ par elle-même et de $\sum \frac{x^n}{n!}$ par $\sum x^n$ (premiers coefficients).

Exercice 8 – Carrés des coefficients et séries paires

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $R \in]0, +\infty[$.

a) Montrer que $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon R^2.

b) Montrer que $\sum a_n x^{2n}$ a pour rayon $\sqrt{R}$.

c) Application : rayons de $\sum \frac{x^{2n}}{4^n}$ et de $\sum \frac{x^n}{n^2 4^n}$.

Exercice 9 – Coefficients trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $a_n = \cos(n\theta)$.

a) Montrer que $(\cos(n\theta))$ ne tend pas vers 0 (utiliser $\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1$).

b) En déduire que $\sum \cos(n\theta) x^n$ a pour rayon 1 et diverge en $x = \pm 1$.

c) Calculer sa somme pour $|x| < 1$.

Exercice 10 – Rayon par la racine n-ième

Déterminer le rayon de convergence de :

a) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$;
c) $\sum \frac{x^n}{(\ln n)^n}$.

Exercice 11 – Cas extrêmes

Déterminer le rayon de convergence de :

a) $\sum n!\, x^n$;
b) $\sum \frac{x^n}{n^n}$;
c) $\sum n^\alpha x^n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et étudier le bord selon α.

Exercice 12 – Comportement au bord : dériver peut détruire la convergence

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

a) Montrer que la série converge normalement sur $[-1, 1]$.
b) Étudier la série dérivée en $x = 1$ et $x = -1$.
c) Étudier la série dérivée seconde en $x = -1$.

Exercice 13 – Rayon d'une série définie par une récurrence

Soit $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} a_n$.

a) Déterminer le rayon de $\sum a_n x^n$.
b) Montrer que $a_n = \binom{2n}{n}$.
c) Même question pour $b_0 = 1$, $b_{n+1} = \frac{n+3}{2n+5} b_n$.

Exercice 14 – Coefficients encadrés

Soit (a_n) telle que $\frac{1}{n^2} \leq a_n \leq n^3$ pour $n \geq 1$.

a) Déterminer le rayon de $\sum a_n x^n$.
b) Peut-on avoir $2^{-n} \leq |a_n| \leq 3^{-n}$ pour tout $n \geq 1$? Que dire du rayon si $3^{-n} \leq |a_n| \leq 2^{-n}$?
c) Que peut-on dire du rayon si seulement $|a_n| \leq 2^{-n}$?

Exercice 15 – Synthèse : nombres harmoniques

Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S(x) = \sum_{n \geq 1} H_n x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence (utiliser $H_n \sim \ln n$).
b) Montrer que S est le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} x^n$ et de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$, et en déduire $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
c) Étudier la convergence en $x = \pm 1$.
d) En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{2^n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).