Plaquette 4 – Sommes de séries entières et fonctions génératrices en dénombrement

Séries entières — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour **calculer la somme** de $\sum a_n x^n$, on reconnaît une série usuelle après décomposition de a_n (fraction rationnelle en n décomposée en éléments simples, polynôme en n écrit dans la base $1, n, n(n-1), \ldots$), puis on dérive ou intègre terme à terme ; les racines de l'unité isolent les termes $n \equiv r \pmod p$. En **dénombrement**, on associe à une suite (u_n) sa série génératrice $\sum u_n x^n$ (ou exponentielle $\sum u_n \frac{x^n}{n!}$) : une récurrence linéaire ou une convolution devient une **équation algébrique ou différentielle** sur la somme, qu'on résout avant de redévelopper pour obtenir u_n.

Exercice 1 – Une somme par décomposition

a) Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ pour $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$.

b) En déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$.

c) Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$, puis sa valeur en $x = 1$ par continuité.

Exercice 2 – Polynôme en n fois exponentielle

a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 x^n}{n!} = (x^2 + x)\mathrm{e}^x$ (écrire $n^2 = n(n-1) + n$).

b) Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n$.

c) En déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$ et l'espérance de X^2 pour X de loi de Poisson de paramètre 1.

Exercice 3 – Extraire un terme sur trois

Soit $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

a) Montrer que $1 + j^n + j^{2n}$ vaut 3 si $3 \mid n$ et 0 sinon.

b) En déduire $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{3k}}{(3k)!} = \frac{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}}{3}$.

c) Donner $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k)!}$ numériquement.

Exercice 4 – Série logarithmique trigonométrique

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$ pour $|x| < 1$.

a) Montrer que $S'(x) = \sum_{n \geq 1} \cos(n\theta) x^{n-1} = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

b) En déduire $S(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$.

c) Que donne $x = 1$ formellement ? (On admettra la convergence de $\sum \frac{\cos n\theta}{n}$ et la continuité en 1.)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Récurrence linéaire par série génératrice

Soit $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

a) Montrer que $U(x) = \sum u_n x^n$ vérifie $(1 - 3x + 2x^2)U(x) = x$ (en admettant un rayon > 0, justifié par $|u_n| \leq 4^n$).

b) Décomposer $\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ en éléments simples et en déduire u_n.

c) Vérifier sur les premiers termes.

Exercice 6 – Les nombres de Catalan

Soit $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$, et $C(x) = \sum c_n x^n$.

a) En admettant $c_n \leq 4^n$ (interprétation par les chemins), montrer que $xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$ pour $|x| < \frac{1}{4}$.

b) En déduire $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ (choix du signe par continuité en 0).

c) Avec $\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n$, en déduire $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Exercice 7 – Dérangements

Soit d_n le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe ($d_0 = 1$).

a) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ (classer selon l'ensemble des points fixes).

b) Avec $D(x) = \sum d_n \frac{x^n}{n!}$, en déduire $e^x D(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

c) En déduire $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, et $\frac{d_n}{n!} \to \frac{1}{e}$.

Exercice 8 – Les nombres de Bell

Le nombre b_n de partitions d'un ensemble à n éléments vérifie $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

a) Calculer $b_1, \ldots, b_5$.

b) Avec $B(x) = \sum b_n \frac{x^n}{n!}$ (on admet un rayon > 0), montrer que $B'(x) = e^x B(x)$.

c) En déduire $B(x) = e^{e^x - 1}$ et la formule $b_n = \frac{1}{e}\sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$ (formule de Dobinski, admettre l'interversion).

Exercice 9 – Rendre la monnaie

On note p_n le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1, 2 et 5 euros (ordre indifférent).

a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} p_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$ pour $|x| < 1$.

b) Calculer p_{10} en comptant directement.

c) Combien de façons de payer n avec seulement des pièces de 1 et 2 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Valeurs numériques de séries par les dérivées

a) Calculer $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{3^n}$.

b) Montrer que $\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^n=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ et en déduire $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{2^n}$.

c) Calculer $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{2^n}$ (on admet $\sum n^3x^n=\frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$, à vérifier sur le terme en x^2).

Exercice 11 – Coefficients binomiaux centraux

a) Montrer que $\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ pour $|x|<\frac{1}{4}$ (binôme généralisé avec $\alpha=-\frac{1}{2}$).

b) En déduire $\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}8^{-n}$.

c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n$.

Exercice 12 – Mots binaires sans deux 1 consécutifs

Soit a_n le nombre de mots de longueur n sur $\{0,1\}$ sans deux 1 consécutifs ($a_0=1$).

a) Montrer que $a_1=2$ et $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ (discuter le premier caractère).

b) Déterminer la série génératrice $A(x)=\sum a_nx^n$.

c) Calculer a_{10} et donner un équivalent de a_n.

Exercice 13 – Suites récurrentes non homogènes

Soit $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n+n$ pour $n\geq 0$.

a) Montrer que $U(x)=\sum u_nx^n$ vérifie $U(x)-1=2xU(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}$.

b) En déduire $U(x)=\frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$, et la décomposer en éléments simples.

c) En déduire u_n et vérifier sur u_1, u_2, u_3.

Exercice 14 – Nombre de solutions entières d'une équation

Soit s_n le nombre de solutions de $a+b+c=n$ avec $a,b,c\in\mathbb{N}$ et $a\leq 2$.

a) Montrer que $\sum s_nx^n=\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}$.

b) En déduire s_n pour $n\geq 2$.

c) Vérifier par un dénombrement direct pour $n=3$.

Exercice 15 – Synthèse : les nombres de Bernoulli

On admet que $\frac{x}{e^x-1}$ (prolongée par 1 en 0) est développable en série entière au voisinage de 0 : $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n\geq 0}B_n\frac{x^n}{n!}$.

a) En écrivant $x=\left(\sum B_n\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m\geq 1}\frac{x^m}{m!}\right)$, montrer que $B_0=1$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0$ pour $n\geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer B_1, B_2, B_3, B_4.
c) Montrer que $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{x}{2}$ est paire, et en déduire $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).