Plaquette 2 – Calculer avec les génératrices : coefficients, moments et dés

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lecture des coefficients. $\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$, et deux variables de même génératrice ont même loi.

Moments. $G_X^{(r)}(1)=\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$ (si fini), et

$$\mathbb{E}(X)=G_X'(1) \qquad \mathrm{V}(X)=G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2$$

Évaluations utiles.

— $\mathbb{P}(X \text{ pair})=\dfrac{1+G_X(-1)}{2}$;

— avec $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$: $\mathbb{P}(X\equiv 0\ [3])=\dfrac{G_X(1)+G_X(j)+G_X(j^2)}{3}$;

— **majoration exponentielle** : pour $t\geq 1$ tel que $G_X(t)<+\infty$,

$$\mathbb{P}(X\geq a)\leq \frac{G_X(t)}{t^a}$$

Sommes. X, Y indépendantes : $G_{X+Y}=G_XG_Y$. Dé équilibré : $G(t)=\dfrac{t+t^2+\cdots+t^6}{6}=\dfrac{t(1-t^6)}{6(1-t)}$.

Correction de l’exercice 1 – Reconnaître une loi à sa génératrice

On met chaque expression sous une forme usuelle, puis on conclut par **unicité** : la génératrice caractérise la loi.

a) $\dfrac{(2+t)^3}{27}=\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}t\right)^3$: c’est $(q+pt)^n$ avec $n=3$, $p=\dfrac{1}{3}$. Donc $X\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$.

b) $\dfrac{t}{2-t}=\dfrac{\frac{1}{2}t}{1-\frac{1}{2}t}$: forme $\dfrac{pt}{1-qt}$ avec $p=q=\dfrac{1}{2}$, donc $X\sim G\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $\mathrm{e}^{2(t^2-1)}=G_Y\left(t^2\right)$ avec $Y\sim P(2)$:

$$\mathrm{e}^{2(t^2-1)}=\sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{-2}\frac{2^k}{k!}t^{2k}$$

— donc $X=2Y$ en loi : $\mathbb{P}(X=2k)=\mathrm{e}^{-2}\dfrac{2^k}{k!}$, et X ne prend que des valeurs paires.

d) $\dfrac{t+t^2+t^3}{3}$: X est uniforme sur $\{1,2,3\}$.

— **Contrôle** : chaque expression vaut bien 1 en $t=1$.

Réponse. a) $B(3,\frac{1}{3})$; b) $G(\frac{1}{2})$; c) $2Y$, $Y\sim P(2)$; d) uniforme sur $\{1,2,3\}$.

Correction de l’exercice 2 – Une génératrice rationnelle

a) $G_X(1)=1$ donne $\dfrac{c}{1\times 2}=1$, soit $c=2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\frac{1}{(2-t)(3-t)} = \frac{1}{2-t} - \frac{1}{3-t}$, et pour $|t| < 2$: $\frac{1}{a-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{a^{n+1}}$. Donc

$$\mathbb{P}(X = n) = 2\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{2}{3^{n+1}}$$

— **Contrôle** : $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{c}{6}$ ✓ ; ces nombres sont positifs car $2^n \leq \frac{3^{n+1}}{2}$.

c) $\frac{2}{(2-t)(3-t)} = \frac{1/2}{1-t/2} \times \frac{2/3}{1-t/3}$: produit des génératrices de U et V indépendantes, de lois géométriques **sur** $\mathbb{N}$ ($\mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\mathbb{P}(V = k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$). Donc X a la loi de $U + V$.

d) $\mathbb{E}(U) = \frac{1/2}{1/2} = 1$ et $\mathbb{E}(V) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$.

Réponse. $c = 2$; $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-(n+1)}$; $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Moments factoriels de la loi binomiale

a) $G_X(t) = (q + pt)^n$ est un polynôme ; on dérive r fois :

$$G_X^{(r)}(t) = n(n-1)\cdots(n-r+1)\, p^r (q + pt)^{n-r}$$

— d'où $G_X^{(r)}(1) = n(n-1)\cdots(n-r+1)\, p^r$ (nul si $r > n$).

b) Par linéarité de l'espérance et la décomposition donnée :

$$\mathbb{E}\left(X^3\right) = G_X'''(1) + 3G_X''(1) + G_X'(1) = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$$

c) $n = 10$, $p = 0{,}3$:

— $720 \times 0{,}027 = 19{,}44$; $3 \times 90 \times 0{,}09 = 24{,}3$; $10 \times 0{,}3 = 3$.

— $\mathbb{E}\left(X^3\right) = 46{,}74$.

— **Contrôle** de la variance : $G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = 8{,}1 + 3 - 9 = 2{,}1 = npq$ ✓.

Réponse. $G_X^{(r)}(1) = \frac{n!}{(n-r)!} p^r$; $\mathbb{E}(X^3) = 46{,}74$ pour $B(10; 0{,}3)$.

Correction de l'exercice 4 – Dérivée logarithmique de la génératrice

a) $L' = \frac{G'}{G}$ et $L'' = \frac{G''}{G} - \left(\frac{G'}{G}\right)^2$, avec $G(1) = 1$:

$$L'(1) = G'(1) = \mathbb{E}(X) \qquad L''(1) + L'(1) = G''(1) - G'(1)^2 + G'(1) = \mathrm{V}(X)$$

b) **Poisson** : $L(t) = \lambda(t-1)$, $L' = \lambda$, $L'' = 0$: $\mathbb{E} = \mathrm{V} = \lambda$.

— **Binomiale** : $L(t) = n\ln(q + pt)$, $L'(t) = \frac{np}{q+pt}$, $L''(t) = -\frac{np^2}{(q+pt)^2}$: $\mathbb{E} = np$ et $\mathrm{V} = np - np^2 = npq$.

c) $L(t) = r\ln p + r\ln t - r\ln(1 - qt)$, donc $L'(t) = \frac{r}{t} + \frac{rq}{1-qt}$ et $L''(t) = -\frac{r}{t^2} + \frac{rq^2}{(1-qt)^2}$:

— $\mathbb{E} = r + \frac{rq}{p} = \frac{r}{p}$;

— $\mathrm{V} = -r + \frac{rq^2}{p^2} + \frac{r}{p} = \frac{rq}{p} + \frac{rq^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$.

— **Intérêt** : le logarithme transforme les **produits** (sommes indépendantes) en **sommes** : espérances et variances s'additionnent, ce qu'on lit directement sur L.

Réponse. $\mathbb{E} = L'(1)$, $\mathrm{V} = L''(1) + L'(1)$; Pascal : $\frac{r}{p}$ et $\frac{rq}{p^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Probabilité d'être pair

a) La série $G_X(-1) = \sum_n (-1)^n \mathbb{P}(X=n)$ converge absolument. Donc

$$G_X(1) + G_X(-1) = \sum_n \left(1 + (-1)^n\right)\mathbb{P}(X=n) = 2\,\mathbb{P}(X \text{ pair})$$

— et $G_X(1) = 1$ donne la formule.

b) $G_X(-1) = \mathrm{e}^{-2\lambda}$, donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}$; pour $\lambda = 1$: $\approx 0{,}568$. Cette probabilité est toujours $> \frac{1}{2}$ et tend vers $\frac{1}{2}$ quand $\lambda \to +\infty$.

c) $G_X(-1) = \dfrac{-p}{1+q}$, donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \dfrac{1+q-p}{2(1+q)} = \dfrac{q}{1+q}$.

— **Contrôle** $p = \frac{1}{2}$: $\frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, et directement $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$ ✓.

Réponse. $\dfrac{1+G_X(-1)}{2}$; Poisson : $\dfrac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} \approx 0{,}568$; géométrique : $\dfrac{q}{1+q}$.

Correction de l'exercice 6 – Reste modulo 3 et racines de l'unité

a) Si $3 \mid n$, $j^n = 1$ et la somme vaut 3 ; sinon j^n est une racine primitive et $1 + j^n + j^{2n} = \dfrac{1-j^{3n}}{1-j^n} = 0$. Donc

$$\mathbb{P}(X \equiv 0\ [3]) = \frac{1}{3}\sum_n \left(1 + j^n + j^{2n}\right)\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X(1) + G_X(j) + G_X(j^2)}{3}$$

b) $G_X(t) = \left(\dfrac{1+t}{2}\right)^n$ et $1 + j = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ (car $1 + j = -j^2$), donc $G_X(j) = \dfrac{\mathrm{e}^{in\pi/3}}{2^n}$ et $G_X(j^2) = \overline{G_X(j)}$:

— $G_X(j) + G_X(j^2) = \dfrac{2\cos(n\pi/3)}{2^n}$, d'où la formule.

c) $n = 6$: $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{64}\right) = \frac{66}{192} = \frac{11}{32}$.

— **Direct** : $\dfrac{\binom{6}{0} + \binom{6}{3} + \binom{6}{6}}{64} = \dfrac{1+20+1}{64} = \dfrac{22}{64} = \dfrac{11}{32}$ ✓.

Réponse. $\dfrac{G(1)+G(j)+G(j^2)}{3}$; $\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2\cos(n\pi/3)}{2^n}\right)$; $\frac{11}{32}$ pour $n = 6$.

Correction de l'exercice 7 – Loi de Poisson conditionnée à être non nulle

a) Pour $n \geq 1$, $\mathbb{P}(Y=n) = \dfrac{\mathbb{P}(X=n)}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$, donc

$$G_Y(t) = \frac{G_X(t) - \mathbb{P}(X=0)}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

b) $G_Y'(t) = \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$, d'où $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$; pour $\lambda = 2$: $\approx 2{,}313$.

c) $G_Y''(1) = \dfrac{\lambda^2}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$. Avec $\lambda = 2$ et $d = 1-\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}8647$:

— $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{4}{d} + \dfrac{2}{d} - \dfrac{4}{d^2} \approx 4{,}626 + 2{,}313 - 5{,}350 \approx 1{,}589$.

— **Lecture** : conditionner par $X \geq 1$ augmente la moyenne ($2{,}31 > 2$) et réduit la dispersion ($1{,}59 < 2$), puisqu'on retire la valeur 0.

Réponse. $G_Y(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$; $\mathbb{E}(Y) \approx 2{,}313$, $\mathrm{V}(Y) \approx 1{,}589$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Majoration exponentielle par la génératrice

a) Pour $t \geq 1$, la fonction $x \mapsto t^x$ est croissante et positive, donc $\{X \geq a\} \subset \left\{t^X \geq t^a\right\}$. **Markov** appliquée à t^X :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left(t^X\right)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}$$

b) $G_X(t) = \mathrm{e}^{t-1}$ est finie pour tout t. On minimise $h(t) = t - 1 - 5\ln t$: $h'(t) = 1 - \frac{5}{t} = 0$ pour $t = 5$, d'où

— $\mathbb{P}(X \geq 5) \leq \frac{\mathrm{e}^4}{5^5} = \frac{\mathrm{e}^4}{3\,125} \approx 0{,}0175$.

c) Markov donne $\frac{1}{5} = 0{,}2$; la génératrice donne 0,0175, à moins d'un facteur 5 de la valeur exacte $1 - \mathrm{e}^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \approx 0{,}0037$.

— **Remarque** : c'est l'inégalité de Chernoff écrite avec $t = \mathrm{e}^s$; elle n'a de sens que si le rayon de G_X dépasse 1.

Réponse. $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$; borne $\frac{\mathrm{e}^4}{3125} \approx 0{,}0175$ (exact 0,0037, Markov 0,2).

Correction de l'exercice 9 – Trois dés : la somme 10

a) **Indépendance** : $G_S = G_D^3$ avec $G_D(t) = \frac{t}{6} \cdot \frac{1 - t^6}{1 - t}$.

b) $\mathbb{P}(S = 10)$ est le coefficient de t^{10}, donc $\frac{1}{216}\times$ le coefficient de t^7 dans

$$(1 - 3t^6 + 3t^{12} - t^{18}) \sum_{k \geq 0} \binom{k+2}{2} t^k$$

— Seuls $k = 7$ et $k = 1$ contribuent : $\binom{9}{2} - 3\binom{3}{2} = 36 - 9 = 27$.

— $\mathbb{P}(S = 10) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

c) Pour $S = 9$, coefficient de t^6 : $\binom{8}{2} - 3\binom{2}{2} = 28 - 3 = 25$, d'où $\mathbb{P}(S = 9) = \frac{25}{216}$.

— **Commentaire** : 9 et 10 s'écrivent chacun de six façons comme somme de trois entiers de 1 à 6 sans ordre, mais ces façons n'ont pas le même nombre de permutations ($3 + 3 + 3$ ne compte qu'une fois). C'est la question posée à Galilée.

Réponse. $\mathbb{P}(S = 10) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$; $\mathbb{P}(S = 9) = \frac{25}{216}$.

Correction de l'exercice 10 – Simuler un dé à 36 faces avec deux dés

a) $G_U(t) = \frac{1}{6}\left(1 + t + \cdots + t^5\right) = \frac{1 - t^6}{6(1 - t)}$ et $G_V(t) = \frac{1}{6}\left(1 + t^6 + \cdots + t^{30}\right) = \frac{1 - t^{36}}{6(1 - t^6)}$.

b) **Indépendance** :

$$G_{U+V}(t) = \frac{1 - t^6}{6(1 - t)} \cdot \frac{1 - t^{36}}{6(1 - t^6)} = \frac{1 - t^{36}}{36(1 - t)} = \frac{1 + t + \cdots + t^{35}}{36}$$

— C'est la génératrice de la loi uniforme sur $\{0, \ldots, 35\}$: par **unicité**, $U + V$ suit cette loi.

— **Lecture** : c'est l'écriture en base 6, chiffre des unités et chiffre des « sixaines ».

c) On ajoute un troisième dé W numéroté $0, 36, 72, 108, 144, 180$: $G_W(t) = \frac{1 - t^{216}}{6(1 - t^{36})}$ et le produit télescope en $\frac{1 - t^{216}}{216(1 - t)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $G_{U+V}(t) = \frac{1-t^{36}}{36(1-t)}$: uniforme sur $\{0, \dots, 35\}$.

Correction de l'exercice 11 – Pas de dés pipés à somme uniforme

a) $G_{D_1}(t) = tA(t)$, $G_{D_2}(t) = tB(t)$, et la somme uniforme a pour génératrice $\frac{t^2}{11}\left(1 + t + \cdots + t^{10}\right)$. Par **indépendance** et unicité, la condition s'écrit

$$A(t)B(t) = \frac{1 + t + \cdots + t^{10}}{11}$$

b) Le coefficient de t^{10} donne $a_6 b_6 = \frac{1}{11} > 0$: A et B sont de degré exactement 5, **impair**. Un polynôme réel de degré impair a une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires, limites opposées en $\pm\infty$).

c) Pour $t \neq 1$, $1 + t + \cdots + t^{10} = \frac{t^{11}-1}{t-1}$, qui ne s'annule que pour $t^{11} = 1$, soit $t = 1$ dans $\mathbb{R}$: exclu. Et en $t = 1$ il vaut 11. Donc pas de racine réelle.

— **Conclusion** : une racine réelle de A serait racine du produit : **contradiction**. Aucun pipage ne rend la somme uniforme.

Réponse. $AB = \frac{1 + \cdots + t^{10}}{11}$ impossible : A de degré 5 a une racine réelle, le membre de droite n'en a pas.

Correction de l'exercice 12 – Les dés de Sicherman

a) $G_1(t) = \frac{t + 2t^2 + 2t^3 + t^4}{6}$ et $G_2(t) = \frac{t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8}{6}$.

b) **Factorisation** : $t + 2t^2 + 2t^3 + t^4 = t(1+t)(1+t+t^2)$ et $t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8 = t(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)^2$.

— Contrôle de la seconde : $(1-t+t^2)^2 = 1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$ et $(1+t)(1+t+t^2) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$; le produit vaut $1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^7$ ✓.

$$G_1(t)G_2(t) = \frac{t^2(1+t)^2(1+t+t^2)^2(1-t+t^2)^2}{36} = \left(\frac{t + \cdots + t^6}{6}\right)^2$$

— Par **unicité**, la somme a la même loi qu'avec deux dés ordinaires.

c) Pour 12 : les seules paires sont $(4, 8)$, probabilité $\frac{1}{36}$, comme $(6, 6)$ avec des dés ordinaires ✓.

Réponse. $G_1 G_2 = \left(\frac{t + \cdots + t^6}{6}\right)^2$: même loi de somme qu'une paire de dés ordinaires.

Correction de l'exercice 13 – Une loi déterminée par ses moments factoriels

a) Par la formule du binôme, $(1+u)^X = \sum_{r \geq 0} \binom{X}{r} u^r$, somme de termes **positifs**. On peut intervertir espérance et somme :

$$\mathbb{E}\left[(1+u)^X\right] = \sum_{r \geq 0} \frac{\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)]}{r!} u^r = \sum_{r \geq 0} \frac{(2u)^r}{r!} = \mathrm{e}^{2u}$$

b) Ainsi $G_X(t) = \sum_n \mathbb{P}(X = n) t^n$ converge pour tout $t = 1 + u \geq 1$, donc le rayon est infini, et $G_X(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$ sur $[1, +\infty[$.

— Deux fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur un intervalle ont les mêmes coefficients (ils se lisent sur les dérivées en un point de l'intervalle) : l'égalité vaut pour tout t.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $G_X(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$: par **unicité**, $X \sim P(2)$.

— **Mise en garde** : sans contrôle de la croissance des moments, des moments égaux ne suffisent pas toujours à déterminer une loi ; ici la série $\sum \frac{2^r}{r!}u^r$ converge, ce qui fait tout.

Réponse. $\mathbb{E}\left[(1+u)^X\right] = \mathrm{e}^{2u}$; $G_X(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$; $X \sim P(2)$.

Correction de l'exercice 14 – Somme de Bernoulli de paramètres différents

a) $G_{B_i}(t) = \frac{i}{i+1} + \frac{1}{i+1}t = \frac{t+i}{i+1}$. **Indépendance** :

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t+i}{i+1} = \frac{(t+1)\cdots(t+n)}{2\times 3\times\cdots\times(n+1)} = \frac{(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}$$

b) $\mathbb{P}(X=0) = G_X(0) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

— $\mathbb{P}(X=1) = G_X'(0)$; par dérivée logarithmique, $G_X'(0) = G_X(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, d'où $\mathbb{P}(X=1) = \frac{H_n}{n+1}$.

c) $n=3$: $(t+1)(t+2)(t+3) = t^3+6t^2+11t+6$, donc X vaut $0,1,2,3$ avec probabilités $\frac{6}{24}, \frac{11}{24}, \frac{6}{24}, \frac{1}{24}$.

— **Contrôle** : $\frac{H_3}{4} = \frac{11/6}{4} = \frac{11}{24}$ ✓.

— **Remarque** : $tG_X(t)$ est la génératrice du nombre de cycles d'une permutation uniforme de S_{n+1} ; on retrouve les nombres $6, 11, 6, 1$.

Réponse. $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{n+1}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{H_n}{n+1}$; $n=3$: $\left(\frac{6}{24}, \frac{11}{24}, \frac{6}{24}, \frac{1}{24}\right)$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : attendre deux piles consécutifs

a) **Premier pas** : si le premier lancer est F (proba $\frac{1}{2}$), tout recommence après 1 lancer, ce qui donne la contribution $\frac{t}{2}G_T(t)$; si les deux premiers sont PF (proba $\frac{1}{4}$), tout recommence après 2 lancers : $\frac{t^2}{4}G_T(t)$; si ce sont PP (proba $\frac{1}{4}$), $T=2$: $\frac{t^2}{4}$.

b) On isole G_T :

$$G_T(t)\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}\right) = \frac{t^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad G_T(t) = \frac{t^2}{4-2t-t^2}$$

c) En notant $a_n = \mathbb{P}(T=n)$, l'égalité $(4-2t-t^2)G_T(t) = t^2$ donne, coefficient par coefficient, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{8}$ et $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2}$ pour $n \geq 4$.

— $b_n = 2^n a_n$ vérifie $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, avec $b_2 = 1$, $b_3 = 1$: $b_n = F_{n-1}$.

d) $G_T'(t) = \frac{2t(4-2t-t^2) + t^2(2+2t)}{(4-2t-t^2)^2}$, et en $t=1$: $\frac{2+4}{1} = 6$. Donc $\mathbb{E}(T) = 6$, écart type $\sqrt{22} \approx 4{,}7$.

— **Contrôle** : $\mathbb{P}(T=4) = \frac{F_3}{16} = \frac{2}{16}$, et il y a exactement 2 suites de longueur 4 qui conviennent, FFPP et PFPP ✓.

Réponse. $G_T(t) = \frac{t^2}{4-2t-t^2}$; $\mathbb{P}(T=n) = \frac{F_{n-1}}{2^n}$; $\mathbb{E}(T) = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).