Plaquette 4 – Marches aléatoires, temps d'attente et dénombrement

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développements utiles. Pour $|x| < \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \qquad 1 - \sqrt{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n} x^n \quad (|x| < 1)$$

Renouvellement. Si u_n est la probabilité d'être revenu au départ à l'instant n ($u_0 = 1$) et f_n celle d'y revenir **pour la première fois** à l'instant n, alors $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$ ($n \geq 1$), soit

$$U(s) = 1 + F(s)\,U(s) \qquad F(s) = 1 - \frac{1}{U(s)}$$

Marche simple (pas $+1$ avec probabilité p, -1 avec q) : $u_{2n} = \binom{2n}{n}(pq)^n$.

Premier passage en $+1$: $G = ps + qs\,G^2$, d'où $\mathbb{P}(T_1 < +\infty) = \min\left(1, \frac{p}{q}\right)$.

Lecture. $\mathbb{P}(T = n)$ = coefficient de s^n ; $\mathbb{E}(T) = G_T'(1)$; $\mathbb{P}(T < +\infty) = G_T(1)$.

Correction de l'exercice 1 – Retours en zéro d'une marche symétrique

a) Être en 0 à l'instant $2n$, c'est avoir fait exactement n pas $+1$ parmi $2n$: nombre de chemins $\binom{2n}{n}$, chacun de probabilité $\frac{1}{2^{2n}}$.

b) Avec $x = \frac{s^2}{4}$ dans le développement du binôme généralisé ($|x| < \frac{1}{4}$) :

$$U(s) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \left(\frac{s^2}{4}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

c) Le nombre de passages en 0 aux instants $2, 4, \ldots, 2N$ est $\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{\{S_{2n}=0\}}$, d'espérance $\sum_{n=1}^{N} u_{2n}$ (**linéarité**).

— Par la formule de Stirling, $u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, terme général d'une série divergente : l'espérance tend vers $+\infty$ (elle croît comme $2\sqrt{N/\pi}$).

— C'est aussi ce que dit $U(s) \to +\infty$ quand $s \to 1^-$.

Réponse. $u_{2n} = \binom{2n}{n} 4^{-n}$; $U(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$; nombre moyen de retours infini.

Correction de l'exercice 2 – Premier retour en zéro : équation de renouvellement

a) On découpe l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'instant $2k$ du **premier** retour (événements disjoints). Après ce retour, la marche repart de 0 indépendamment de son passé, et doit être en 0 au bout de $2n - 2k$ pas : probabilité $f_{2k} u_{2n-2k}$.

b) En termes de génératrices, a) s'écrit $U(s) - 1 = F(s)U(s)$ (le 1 vient de u_0), d'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$F(s) = 1 - \frac{1}{U(s)} = 1 - \sqrt{1 - s^2}$$

c) $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum f_{2n} = F(1^-) = 1$: le retour est **certain** (la marche est récurrente).

— $F'(s) = \dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}} \to +\infty$ quand $s \to 1^-$: $\mathbb{E}(T) = +\infty$.

— **Paradoxe** : on revient toujours, mais il faut en moyenne une infinité de pas.

Réponse. $F(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$; $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$; $\mathbb{E}(T) = +\infty$.

Correction de l'exercice 3 – Loi explicite du premier retour

a) La dérivée vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \dfrac{x^n}{4^n}$. On intègre terme à terme sur $[0, x]$ (rayon 1), puis on pose $m = n + 1$:

$$1 - \sqrt{1-x} = \sum_{m \geq 1} \frac{\binom{2m-2}{m-1}}{2m \cdot 4^{m-1}} x^m$$

— Comme $\binom{2m}{m} = \binom{2m-2}{m-1}\dfrac{2m(2m-1)}{m^2}$, le coefficient s'écrit aussi $\dfrac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)4^m}$.

b) Avec $x = s^2$: $\mathbb{P}(T = 2n) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n}$.

— $\mathbb{P}(T=2) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\mathbb{P}(T=4) = \dfrac{6}{3\times 16} = \dfrac{1}{8}$; $\mathbb{P}(T=6) = \dfrac{20}{5\times 64} = \dfrac{1}{16}$.

c) Les chemins de longueur 4 revenant en 0 pour la première fois au temps 4 sont $(+,+,-,-)$ et $(-,-,+,+)$: $\dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$ ✓.

Réponse. $\mathbb{P}(T = 2n) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$.

Correction de l'exercice 4 – Ne pas revenir pendant longtemps

a) T ne prend que des valeurs paires : $\mathbb{P}(T > 2n) = \sum_{k > n} f_{2k}$ (en comptant $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$). On intervertit les sommes (termes positifs) :

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > 2n) s^{2n} = \sum_{k \geq 1} f_{2k} \sum_{n=0}^{k-1} s^{2n} = \sum_{k \geq 1} f_{2k} \frac{1 - s^{2k}}{1 - s^2} = \frac{1 - F(s)}{1 - s^2}$$

b) $\dfrac{1 - F(s)}{1 - s^2} = \dfrac{\sqrt{1-s^2}}{1-s^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}} = U(s)$. Par **unicité** des coefficients, $\mathbb{P}(T > 2n) = u_{2n}$.

c) $\mathbb{P}(T > 100) = u_{100} = \dfrac{\binom{100}{50}}{2^{100}} \approx 0{,}0796$; l'équivalent $\dfrac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx 0{,}0798$ est très bon.

— **Lecture** : environ 8 % des marches n'ont pas encore égalisé après 100 lancers — la queue décroît seulement en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où l'espérance infinie.

Réponse. $\mathbb{P}(T > 2n) = u_{2n}$; $\mathbb{P}(T > 100) \approx 0{,}080$.

Correction de l'exercice 5 – Premier passage au-dessus de zéro

a) Si le premier pas est $+1$ (proba p), $T = 1$. S'il est -1 (proba q), il faut remonter de -1 à 0, puis de 0 à 1 : deux temps **indépendants** de même loi que T, plus le premier pas. D'où

$$G(s) = ps + qs\,G(s)^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Équation $qsG^2 - G + ps = 0$, de racines $\frac{1 \pm \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$. Comme $G(s) \to 0$ quand $s \to 0$, on garde le signe $-$.

c) En $s \to 1^-$: $\sqrt{1-4pq} = \sqrt{(p-q)^2} = |p-q|$, donc $\mathbb{P}(T < +\infty) = \frac{1-|p-q|}{2q}$.

— Si $p \geq q$: $\frac{1-p+q}{2q} = 1$. Si $p < q$: $\frac{1-q+p}{2q} = \frac{p}{q}$.

— $p = 0{,}4$: $\mathbb{P}(T < +\infty) = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$; une fois sur trois, la marche ne dépasse jamais 0.

Réponse. $G(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$; $\mathbb{P}(T < \infty) = \min(1, \frac{p}{q})$; $\frac{2}{3}$ pour $p = 0{,}4$.

Correction de l'exercice 6 – Temps moyen d'atteinte d'une marche biaisée

a) On dérive : $G' = p + qG^2 + 2qsGG'$. En $s = 1$, avec $G(1) = 1$ (car $p > q$) et $m = G'(1)$:

$$m = p + q + 2qm \quad \Longrightarrow \quad m(1-2q) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}$$

— (car $1 - 2q = p + q - 2q = p - q$).

b) $p = 0{,}6$: $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{0{,}2} = 5$ pas.

— **Interprétation** : la dérive moyenne est $p - q = 0{,}2$ par pas ; il faut en moyenne $\frac{1}{0{,}2}$ pas pour gagner une unité, comme si la marche avançait à vitesse constante.

c) Pour $p = q$, la relation $m(1-2q) = 1$ devient $0 = 1$: impossible avec m fini. Donc $\mathbb{E}(T) = +\infty$, alors que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ — même phénomène que pour le premier retour.

Réponse. $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p-q}$; 5 pas pour $p = 0{,}6$; infini si $p = q$.

Correction de l'exercice 7 – Retour en zéro d'une marche biaisée

a) $u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$ et le développement $\sum \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ avec $x = pqs^2$ donnent

$$U(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$$

b) **Renouvellement** : $F = 1 - \frac{1}{U} = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$, et en $s = 1$:

— $\mathbb{P}(\text{retour}) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - |p-q| < 1$: la marche biaisée est **transiente**.

c) $p = 0{,}6$: probabilité de retour $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

— Le nombre R de retours vérifie $\mathbb{P}(R \geq k) = 0{,}8^k$ (chaque retour relance la marche) : $\mathbb{E}(R) = \sum_{k \geq 1} 0{,}8^k = 4$.

— **Contrôle** : $\mathbb{E}(R) = \sum_{n \geq 1} u_{2n} = U(1) - 1 = \frac{1}{0{,}2} - 1 = 4$ ✓.

Réponse. $U(s) = (1-4pqs^2)^{-1/2}$; retour avec probabilité $1 - |p-q|$; 0,8 et 4 retours en moyenne.

Correction de l'exercice 8 – Monter un escalier au hasard

a) On pose le pied sur la marche n si et seulement si on l'atteint par un pas de 1 depuis $n-1$ ou de 2 depuis $n-2$ (cas disjoints, selon la dernière marche visitée avant n) : $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$. Pour $n = 1$, seul le premier pas de longueur 1 convient.

b) En multipliant par s^n et en sommant : $P(s) - 1 - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}(P(s) - 1) + \frac{s^2}{2}P(s)$, d'où

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{2} - \frac{s^2}{2}} = \frac{1}{(1-s)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}$$

c) $\frac{1}{(1-s)(1+s/2)} = \frac{2/3}{1-s} + \frac{1/3}{1+s/2}$, donc

— $p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, et $p_n \to \frac{2}{3}$.

— **Contrôle** : $p_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$, et directement $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ✓.

— **Lecture** : la longueur moyenne d'un pas est $\frac{3}{2}$, et l'on visite asymptotiquement une marche sur $\frac{3}{2}$.

Réponse. $p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Génératrice du nombre de cycles

a) Une permutation de $\{1, \dots, n+1\}$ s'obtient de façon unique à partir d'une permutation de $\{1, \dots, n\}$: soit $n+1$ forme un **point fixe** (un cycle de plus : $c(n, k-1)$ cas), soit on l'insère juste après l'un des n éléments dans son cycle (même nombre de cycles : $n\,c(n,k)$ cas).

b) La relation donne $P_{n+1}(t) = (t+n)P_n(t)$ et $P_1(t) = t$. Donc $P_n(t) = t(t+1)\cdots(t+n-1)$ et

$$G_{C_n}(t) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{t+j}{1+j}$$

c) C'est un produit de génératrices de Bernoulli $B\left(\frac{1}{j+1}\right)$: **dérivée logarithmique**, $L'(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+j} = H_n$ et $L''(1) = -\sum \frac{1}{(1+j)^2}$, d'où $\mathrm{V}(C_n) = H_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

— $n = 5$: $\mathbb{E}(C_5) = \frac{137}{60} \approx 2{,}283$ et $\mathrm{V}(C_5) = \frac{137}{60} - \frac{5\,269}{3\,600} \approx 2{,}283 - 1{,}464 = 0{,}819$.

Réponse. $G_{C_n}(t) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}$; $\mathbb{E} = H_n$, $\mathrm{V} = H_n - \sum \frac{1}{k^2}$; $n=5$: 2,283 et 0,819.

Correction de l'exercice 10 – Génératrice du nombre d'inversions

a) Placer la plus grande valeur n en position $n-k$ (avec $0 \le k \le n-1$) crée exactement k nouvelles inversions (avec les k valeurs placées après elle), sans modifier les autres. Chaque position a probabilité $\frac{1}{n}$, indépendamment de la permutation de départ : $I_n = I_{n-1} + V_n$ avec V_n uniforme sur $\{0, \dots, n-1\}$ et indépendante. D'où le produit des génératrices.

b) Par récurrence, et avec $1 + t + \cdots + t^{j-1} = \frac{1-t^j}{1-t}$:

$$G_{I_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 + t + \cdots + t^{j-1}}{j}$$

— $\mathbb{P}(I_n = 0) = G_{I_n}(0) = \frac{1}{n!}$ (seule l'identité).

— $\mathbb{P}(I_n = 1)$: coefficient de t, obtenu en prenant t dans un seul facteur ($j \ge 2$) et 1 ailleurs : $\frac{n-1}{n!}$ (les $n-1$ transpositions de deux voisins).

c) $n = 4$: $\mathbb{P}(I_4 = 0) = \frac{1}{24}$, $\mathbb{P}(I_4 = 1) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$, et $\mathbb{P}(I_4 = 6) = \frac{1}{24}$ (coefficient dominant).

Réponse. $G_{I_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 + \cdots + t^{j-1}}{j}$; $\mathbb{P}(I_n = 0) = \frac{1}{n!}$, $\mathbb{P}(I_n = 1) = \frac{n-1}{n!}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Loi exacte du collectionneur à trois vignettes

a) Le premier achat donne un modèle neuf ; ensuite $G_2 \sim G\left(\frac{2}{3}\right)$ et $G_3 \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$ (indépendantes) :

$$G_T(t) = t \cdot \frac{\frac{2}{3}t}{1-\frac{t}{3}} \cdot \frac{\frac{1}{3}t}{1-\frac{2t}{3}} = \frac{2t^3}{9\left(1-\frac{t}{3}\right)\left(1-\frac{2t}{3}\right)}$$

b) $\frac{1}{(1-t/3)(1-2t/3)} = \frac{2}{1-2t/3} - \frac{1}{1-t/3}$, de coefficient de t^j égal à $2\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{1}{3}\right)^j$. Donc, pour $k \geq 3$,

— $\mathbb{P}(T=k) = \frac{2}{9}\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-3}\right]$.

c) $\mathbb{P}(T=3) = \frac{2}{9}(2-1) = \frac{2}{9}$: il faut trois modèles distincts, $\frac{3!}{27} = \frac{2}{9}$ ✓.
$\mathbb{P}(T=4) = \frac{2}{9}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

— $\mathbb{E}(T) = 1 + \frac{3}{2} + 3 = 5{,}5$ (somme des espérances), soit $3H_3$ ✓.

Réponse. $\mathbb{P}(T=k) = \frac{2}{9}\left[2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-3}\right]$; $\mathbb{E}(T) = 5{,}5$.

Correction de l'exercice 12 – Mots sans deux 1 consécutifs

a) Un mot valide de longueur n finit soit par 0 (précédé d'un mot valide quelconque de longueur $n-1$), soit par 1 — alors il finit par 01, précédé d'un mot valide de longueur $n-2$.

b) En multipliant par x^n et en sommant pour $n \geq 2$:

$$A(x) - 1 - 2x = x(A(x)-1) + x^2 A(x) \quad\Longrightarrow\quad A(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$$

c) La récurrence donne $a_n = F_{n+2}$ (Fibonacci) : $a_{10} = F_{12} = 144$, et la probabilité vaut $\frac{144}{1\,024} \approx 0{,}141$.

— Les pôles de A sont racines de $1-x-x^2$; le plus petit en module est $\frac{1}{\varphi}$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc a_n croît comme φ^n, et la probabilité décroît comme $\left(\frac{\varphi}{2}\right)^n \approx 0{,}809^n$.

Réponse. $A(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$; $\frac{144}{1024} \approx 0{,}141$; décroissance en $0{,}809^n$.

Correction de l'exercice 13 – Les motifs PF et PP n'ont pas la même loi

a) On attend le premier pile ($G_1 \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$) ; dès lors, le motif PF apparaît au premier face qui suit, puisque des piles supplémentaires ne font pas perdre le pile acquis ($G_2 \sim G\left(\frac{1}{2}\right)$, indépendante). Donc

$$G_{T_{PF}}(t) = \left(\frac{t/2}{1-t/2}\right)^2 = \frac{t^2}{(2-t)^2}$$

b) $\mathbb{E}(T_{PF}) = 2 + 2 = 4$ et $\mathrm{V}(T_{PF}) = 2 \times \frac{1/2}{1/4} = 4$.

c) $\frac{t^2}{(2-t)^2} = \frac{t^2}{4}\sum_{k\geq 0}(k+1)\frac{t^k}{2^k}$, donc $\mathbb{P}(T_{PF}=4) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$; et $\mathbb{P}(T_{PP}=4) = \frac{F_3}{16} = \frac{2}{16}$.

— **Contrôle** : les suites de longueur 4 où PF apparaît pour la première fois à la fin sont FFPF, FPPF, PPPF : 3 ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lecture** : PP est plus long à venir et beaucoup plus dispersé (variance 22 contre 4), car un échec après P ramène au départ.

Réponse. $G_{T_{PF}}(t) = \dfrac{t^2}{(2-t)^2}$; $\mathbb{E} = 4$, $\mathrm{V} = 4$; $\mathbb{P}(T_{PF} = 4) = \dfrac{3}{16} > \dfrac{2}{16}$.

Correction de l'exercice 14 – Arrivées pendant un service

a) Sachant $D = d$, A est la somme de d variables indépendantes de loi $P(1)$, de génératrice $\mathrm{e}^{d(t-1)} = \left(\mathrm{e}^{t-1}\right)^d$. **Probabilités totales** :

$$G_A(t) = \sum_{d=1}^{3} \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{t-1}\right)^d = G_D\left(\mathrm{e}^{t-1}\right)$$

b) $\mathbb{P}(A = 0) = G_A(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-3}}{3} \approx \dfrac{0{,}368 + 0{,}135 + 0{,}050}{3} \approx 0{,}184$.

— $\mathbb{E}(A) = G_A'(1) = G_D'(1) \times 1 = \mathbb{E}(D) = 2$.

c) Non : il arrive en moyenne 2 clients pendant chaque service, plus qu'il n'en sort ; la file s'allonge indéfiniment.

— **Critère** : la file est stable si et seulement si $\mathbb{E}(A) < 1$, soit ici un taux d'arrivée inférieur à $\frac{1}{2}$ client par minute.

Réponse. $G_A = G_D \circ \exp(t-1)$; $\mathbb{P}(A = 0) \approx 0{,}184$; $\mathbb{E}(A) = 2$: file instable.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la case du jeu de l'oie

a) On s'arrête sur n si et seulement si l'on s'est arrêté sur $n-k$ puis qu'on a tiré k, pour un unique $k \in \{1, \dots, 6\}$ (la dernière case visitée avant n) : événements disjoints, et le dé est indépendant du passé.

b) En multipliant par s^n et en sommant pour $n \geq 1$: $P(s) - 1 = D(s)P(s)$, d'où $P(s) = \dfrac{1}{1 - D(s)}$ (renouvellement).

c) Pour $1 \leq n \leq 6$, posons $S_n = p_0 + \cdots + p_n$. La relation donne $p_n = \dfrac{S_{n-1}}{6}$, donc $S_n = \dfrac{7}{6} S_{n-1}$ et $S_n = \left(\dfrac{7}{6}\right)^n$, puis

$$p_n = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} \qquad (1 \leq n \leq 6)$$

— $p_6 \approx 0{,}360$; $p_7 = \dfrac{S_6 - p_0}{6} = \dfrac{(7/6)^6 - 1}{6} \approx 0{,}254$.

d) $1 - D(s) = (1-s)Q(s)$ avec $Q(1) = D'(1) = \dfrac{7}{2}$ (taux d'accroissement en 1), donc

$$(1-s)P(s) = \frac{1}{Q(s)} \xrightarrow[s \to 1^-]{} \frac{1}{D'(1)} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

— **Interprétation** : un pas mesure en moyenne 3,5 cases, le pion visite donc asymptotiquement une case sur 3,5. La case 6 est la plus probable de toutes (0,36).

Réponse. $P(s) = \dfrac{1}{1 - D(s)}$; $p_n = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{7}{6}\right)^{n-1}$ $(n \leq 6)$, $p_7 \approx 0{,}254$; $p_n \to \dfrac{2}{7}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).