# Plaquette 3 – Sommes aléatoires et processus de branchement

## Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Somme aléatoire.** Si $N, X_1, X_2, \dots$ sont indépendantes, les $X_i$ de même loi, et $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ :

$$G_S = G_N \circ G_X \qquad \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$$

— $\mathrm{V}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(N)\,\mathbb{E}(X)^2$.
— **Poisson composée** : $N \sim P(\lambda)$ donne $G_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda(G_X(t)-1)}$.
— **Amincissement** : on garde chaque unité avec probabilité $p$ ; $G_X(t) = q + pt$.

**Branchement** (Galton-Watson, loi de reproduction de génératrice $G$, moyenne $m = G'(1)$, $Z_0 = 1$) :

$$G_{Z_n} = G^{\circ n} = G \circ \cdots \circ G \qquad \mathbb{E}(Z_n) = m^n$$

— Probabilité d'extinction $u = \lim_n G^{\circ n}(0)$ : **plus petit point fixe** de $G$ dans $[0,1]$.
— Si $m \leq 1$ (et $G(s) \neq s$), $u = 1$ ; si $m > 1$, $u < 1$.

## Correction de l'exercice 1 – Génératrice d'une somme aléatoire

a) **Formule des probabilités totales** selon la valeur de $N$ (système complet $\{N = n\}$) :

$$G_S(t) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}\left(t^{X_1 + \cdots + X_n}\right) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n)\,G_X(t)^n = G_N(G_X(t))$$

— On a utilisé l'indépendance de $N$ et des $X_i$, puis celle des $X_i$ entre eux ; et $|G_X(t)| \leq 1$ assure la convergence.

b) **Dérivation d'une composée** (à gauche en 1) :
$G_S'(1) = G_N'(G_X(1))G_X'(1) = G_N'(1)\,G_X'(1)$, car $G_X(1) = 1$.

c) $G_N(u) = \left(\frac{1+u}{2}\right)^3$ et $G_X(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^2$ :

— $G_S(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{5 + 2t + t^2}{8}\right)^3$.

— $S$ est la somme de 3 variables indépendantes de loi $\left(\frac{5}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}\right)$ sur $\{0,1,2\}$ ; $\mathbb{E}(S) = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$.

**Réponse.** $G_S = G_N \circ G_X$ ; $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ ; c) $G_S(t) = \left(\frac{5 + 2t + t^2}{8}\right)^3$.

## Correction de l'exercice 2 – Variance d'une somme aléatoire

a) On dérive deux fois $G_S = G_N \circ G_X$ :

$$G_S'' = (G_N'' \circ G_X)(G_X')^2 + (G_N' \circ G_X)G_X''$$

— En 1 : $G_S''(1) = G_N''(1)\mu^2 + \nu\,G_X''(1)$, avec $\mu = \mathbb{E}(X)$, $\nu = \mathbb{E}(N)$.

b) $\mathrm{V}(S) = G_S''(1) + G_S'(1) - G_S'(1)^2$, avec $G_N''(1) = \mathrm{V}(N) - \nu + \nu^2$ et $G_X''(1) = \mathrm{V}(X) - \mu + \mu^2$ :

— $\mathrm{V}(S) = \left(\mathrm{V}(N) - \nu + \nu^2\right)\mu^2 + \nu\left(\mathrm{V}(X) - \mu + \mu^2\right) + \nu\mu - \nu^2\mu^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Les termes $\nu^2\mu^2$ et $\nu\mu$ se simplifient, il reste $\mathrm{V}(N)\mu^2 + \nu\,\mathrm{V}(X)$.

c) Pour $N \sim P(\lambda)$, $\mathbb{E}(N) = \mathrm{V}(N) = \lambda$ :

$$\mathrm{V}(S) = \lambda\left(\mathrm{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) = \lambda\,\mathbb{E}\left(X^2\right)$$

— **Interprétation** : deux sources d'aléa — la taille de chaque terme ($\nu\,\mathrm{V}(X)$) et leur nombre ($\mathrm{V}(N)\mu^2$).

**Réponse.** $\mathrm{V}(S) = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(N)\mathbb{E}(X)^2$ ; Poisson : $\lambda\,\mathbb{E}(X^2)$.

## Correction de l'exercice 3 – Amincissement d'une loi de Poisson

a) $E = \sum_{i=1}^{N} B_i$ avec $B_i \sim B(p)$ indépendantes de $N$. **Somme aléatoire** :

$$G_E(t) = G_N(q + pt) = \mathrm{e}^{\lambda(q+pt-1)} = \mathrm{e}^{\lambda p(t-1)}$$

— Par **unicité**, $E \sim P(\lambda p)$.

b) Par symétrie des rôles ($F = \sum_i (1 - B_i)$, avec $1 - B_i \sim B(q)$) : $F \sim P(\lambda q)$.

c) $\mathbb{P}(E = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda p} = \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0025$.

— **Remarque** : on montre de plus que $E$ et $F$ sont **indépendantes**, propriété remarquable de la loi de Poisson (fausse pour une loi binomiale de $N$, où $E + F$ est fixé).

— **Piège** : sans la génératrice, il faudrait sommer $\sum_{n \geq k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ ; le résultat est le même, mais le calcul est plus long.

**Réponse.** $E \sim P(\lambda p)$, $F \sim P(\lambda q)$ ; $\mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0025$.

## Correction de l'exercice 4 – Amincissement d'une loi binomiale

a) Le nombre $N$ de pièces passant le premier contrôle suit $B(n, p)$, et $X$ est une **somme aléatoire** de $N$ Bernoulli de paramètre $r$ :

$$G_X(t) = G_N(1 - r + rt) = (q + p(1 - r + rt))^n = (1 - pr + prt)^n$$

— C'est la génératrice de $B(n, pr)$ : par **unicité**, $X \sim B(n, pr)$.

b) Chaque pièce passe les deux contrôles avec probabilité $pr$ (probabilités composées), indépendamment des autres : $X$ compte les succès de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $pr$.

c) $pr = 0{,}72$ : $\mathbb{E}(X) = 36$ et $\mathrm{V}(X) = 50 \times 0{,}72 \times 0{,}28 = 10{,}08$.

— **Contrôle** par la variance d'une somme aléatoire :
$\mathbb{E}(N)r(1 - r) + \mathrm{V}(N)r^2 = 45 \times 0{,}16 + 4{,}5 \times 0{,}64 = 7{,}2 + 2{,}88 = 10{,}08$ ✓.

**Réponse.** $X \sim B(n, pr)$ ; $\mathbb{E}(X) = 36$, $\mathrm{V}(X) = 10{,}08$.

## Correction de l'exercice 5 – Une somme géométrique de géométriques

a) $G_X(t) = \frac{rt}{1-(1-r)t}$ et $G_N(u) = \frac{pu}{1-qu}$. **Composition** :

$$G_S(t) = \frac{p\,\frac{rt}{1-(1-r)t}}{1 - q\,\frac{rt}{1-(1-r)t}} = \frac{prt}{1-(1-r)t-qrt} = \frac{prt}{1-(1-pr)t}$$

— C'est la génératrice de $G(pr)$ : $S \sim G(pr)$.

b) **Wald** : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{pr}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) À chaque coup, la partie s'achève avec probabilité $r$, et le joueur s'arrête alors avec probabilité $p$ : chaque coup est le **dernier** avec probabilité $pr$, indépendamment du passé. Le nombre total de coups est donc le temps d'attente d'un événement de probabilité $pr$.

— **Exemple** : $r = 0{,}2$ et $p = 0{,}25$ donnent $S \sim G(0{,}05)$, soit 20 coups en moyenne.

**Réponse.** $G_S(t) = \dfrac{prt}{1-(1-pr)t}$ : $S \sim G(pr)$, $\mathbb{E}(S) = \dfrac{1}{pr}$.

## Correction de l'exercice 6 – Un dé puis des pièces

a) **Somme aléatoire** de $N$ Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ :

$$G_S(t) = G_N\!\left(\frac{1+t}{2}\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1+t}{2}\right)^k$$

b) $\mathbb{P}(S=0) = G_S(0) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{64}\right) = \frac{63}{384} = \frac{21}{128} \approx 0{,}164$.

— $\mathbb{P}(S=6)$ : seul le terme $k=6$ contient $t^6$, avec coefficient $\frac{1}{2^6}$, d'où $\mathbb{P}(S=6) = \frac{1}{6\times 64} = \frac{1}{384}$.

— **Contrôle direct** : il faut $N=6$ puis six piles : $\frac{1}{6}\times\frac{1}{64}$ ✓.

c) $G_S'(1) = G_N'(1)\times\frac{1}{2} = \frac{7}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{4}$.

**Réponse.** $\mathbb{P}(S=0) = \frac{21}{128}$, $\mathbb{P}(S=6) = \frac{1}{384}$, $\mathbb{E}(S) = \frac{7}{4}$.

## Correction de l'exercice 7 – Accidents et blessés

a) **Poisson composée** avec $G_X(t) = \dfrac{1+t+t^2}{3}$ :

$$G_S(t) = \mathrm{e}^{3\left(\frac{1+t+t^2}{3}-1\right)} = \mathrm{e}^{t+t^2-2}$$

b) $\mathbb{P}(S=0) = G_S(0) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$ (et non $\mathrm{e}^{-3}$ : une semaine avec accidents peut être sans blessé).

— $\mathbb{P}(S=1) = G_S'(0) = (1+0)\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$.

c) $G_S'(t) = (1+2t)\mathrm{e}^{t+t^2-2}$, d'où $\mathbb{E}(S) = 3$ ; $G_S''(t) = \left(2+(1+2t)^2\right)\mathrm{e}^{t+t^2-2}$, d'où $G_S''(1) = 11$ et

$$\mathrm{V}(S) = 11 + 3 - 9 = 5$$

— **Contrôle** : $\lambda\,\mathbb{E}\left(X^2\right) = 3\times\frac{0+1+4}{3} = 5$ ✓.

**Réponse.** $G_S(t) = \mathrm{e}^{t+t^2-2}$ ; $\mathbb{P}(S=0) = \mathbb{P}(S=1) = \mathrm{e}^{-2}$ ; $\mathbb{E}(S) = 3$, $\mathrm{V}(S) = 5$.

## Correction de l'exercice 8 – Génératrice des générations d'un branchement

a) $Z_{n+1}$ est une **somme aléatoire** de $Z_n$ variables indépendantes de génératrice $G$, indépendantes de $Z_n$ :

$$G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n}\circ G$$

— Avec $G_{Z_0}(s) = s$, une récurrence immédiate donne $G_{Z_n} = G\circ\cdots\circ G$ ($n$ fois).

b) **Dérivée d'une composée** : $G_{Z_{n+1}}'(1) = G_{Z_n}'(G(1))G'(1) = m\,G_{Z_n}'(1)$, d'où $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

c) $G_{Z_2}(s) = G(G(s)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+s^2}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{8}s^4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\mathbb{P}(Z_2 = 0) = \frac{5}{8}$ ; $Z_2$ vaut 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 4 avec probabilité $\frac{1}{8}$.

— **Contrôle** : $m = 1$ et $\mathbb{E}(Z_2) = \frac{2}{4} + \frac{4}{8} = 1$ ✓.

**Réponse.** $G_{Z_n} = G^{\circ n}$, $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ ; $G_{Z_2}(s) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{8}s^4$.

## Correction de l'exercice 9 – Probabilité d'extinction : le plus petit point fixe

a) $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ (une population éteinte le reste) : $(u_n)$ est croissante, majorée par 1, donc converge vers $u$. Par **continuité** de $G$ sur $[0,1]$, en passant à la limite dans $u_{n+1} = G(u_n)$ :

$$G(u) = u$$

b) Soit $v \in [0,1]$ un point fixe. $G$ est **croissante** sur $[0,1]$ (coefficients positifs). Comme $u_0 = 0 \leq v$, par récurrence $u_{n+1} = G(u_n) \leq G(v) = v$. À la limite, $u \leq v$.

c) $u_1 = 0{,}2$ ; $u_2 = 0{,}2 + 0{,}08 + 0{,}016 = 0{,}296$ ; $u_3 = 0{,}2 + 0{,}1184 + 0{,}035\ldots \approx 0{,}353$.

— Points fixes : $0{,}4s^2 - 0{,}6s + 0{,}2 = 0$, soit $2s^2 - 3s + 1 = 0$, de racines $\frac{1}{2}$ et 1. Donc $u = \frac{1}{2}$.

— **Interprétation** : $m = 1{,}2 > 1$, la population survit à jamais avec probabilité $\frac{1}{2}$, bien qu'elle croisse en moyenne.

**Réponse.** $u_1 = 0{,}2$, $u_2 = 0{,}296$, $u_3 \approx 0{,}353$ ; probabilité d'extinction $u = \frac{1}{2}$.

## Correction de l'exercice 10 – Extinction certaine des processus sous-critiques

a) $G''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)\mathbb{P}(X = k)s^{k-2} > 0$ sur $]0,1[$ car un coefficient au moins est non nul : $G$ est strictement convexe.

b) Posons $h(s) = G(s) - s$ : $h$ est strictement convexe, $h(1) = 0$ et $h'(1) = m - 1 \leq 0$. Une fonction convexe est au-dessus de sa tangente :

$$h(s) \geq h(1) + h'(1)(s-1) = (m-1)(s-1) \geq 0$$

— avec inégalité stricte pour $s < 1$ (stricte convexité). Donc $h$ ne s'annule qu'en 1 : extinction **certaine**.

c) Si $m > 1$ : $h(0) = \mathbb{P}(X = 0) > 0$ et $h'(1) > 0$, donc $h < 0$ juste à gauche de 1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $h$ s'annule dans $]0,1[$ : la probabilité d'extinction est $< 1$.

— **Bilan** : extinction certaine si et seulement si $m \leq 1$ — même dans le cas **critique** $m = 1$, où pourtant $\mathbb{E}(Z_n) = 1$ pour tout $n$.

**Réponse.** $m \leq 1$ : extinction certaine ; $m > 1$ : probabilité d'extinction $< 1$.

## Correction de l'exercice 11 – Descendance géométrique

a) $G(s) = \sum_{k \geq 0} pq^k s^k = \frac{p}{1 - qs}$ pour $|s| < \frac{1}{q}$, et $G'(s) = \frac{pq}{(1-qs)^2}$, d'où

$$m = G'(1) = \frac{q}{p}$$

b) Points fixes : $s(1 - qs) = p$, soit $qs^2 - s + p = 0$. Comme 1 est racine, le produit des racines $\frac{p}{q}$ donne l'autre : $s = \frac{p}{q}$.

— Si $p \geq \frac{1}{2}$ ($m \leq 1$) : $\frac{p}{q} \geq 1$, le plus petit point fixe dans $[0,1]$ est 1, extinction certaine.

— Si $p < \frac{1}{2}$ ($m > 1$) : $u = \frac{p}{q}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $p = \frac{1}{3}$ : $m = 2$ et $u = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$. $p = \frac{2}{3}$ : $m = \frac{1}{2}$, extinction certaine.

— **Lecture** : avec deux enfants en moyenne, une lignée s'éteint encore une fois sur deux.

**Réponse.** $m = \frac{q}{p}$ ; $u = \min\left(1, \frac{p}{q}\right)$ ; $\frac{1}{2}$ pour $p = \frac{1}{3}$, 1 pour $p = \frac{2}{3}$.

## Correction de l'exercice 12 – Taille totale d'une lignée sous-critique

a) Les termes sont **positifs** : on peut intervertir espérance et somme.

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{n \geq 0} m^n = \frac{1}{1-m}$$

— En particulier $T$ est fini presque sûrement, ce qui confirme l'extinction.

b) $m = 2 \times 0{,}4 = 0{,}8$ : $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{0{,}2} = 5$ individus en moyenne, fondateur compris.

c) $m = 0{,}9$ : $\mathbb{E}(T) = 10$ personnes en moyenne.

— **Sensibilité** : avec $m = 0{,}99$, on passerait à 100 ; quand $m \to 1^-$, la taille moyenne explose, bien que la chaîne s'éteigne toujours. C'est le seuil épidémique.

**Réponse.** $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{1-m}$ ; 5 individus ; 10 personnes.

## Correction de l'exercice 13 – Génératrice de la descendance totale

a) La première cellule compte pour 1 (facteur $s$). Si elle meurt (proba $q$), $T = 1$. Si elle se divise (proba $p$), $T = 1 + T' + T''$ où $T'$, $T''$ sont les tailles des deux sous-lignées, **indépendantes** et de même loi que $T$ :

$$H(s) = qs + ps\,H(s)^2$$

b) Équation du second degré en $H$ : $psH^2 - H + qs = 0$, de racines $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$. Il faut $H(s) \to 0$ quand $s \to 0$ (car $T \geq 1$), ce qui impose le signe $-$ (l'autre racine tend vers $+\infty$).

c) Avec $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots$ et $x = 4pqs^2$ :

$$H(s) = \frac{2pqs^2 + 2p^2q^2s^4 + \cdots}{2ps} = qs + pq^2s^3 + \cdots$$

— $\mathbb{P}(T = 1) = q$ et $\mathbb{P}(T = 3) = pq^2$ (une division, puis deux morts) ✓.
— $p = 0{,}4$ : 0,6 et 0,144 ; de plus $m = 2p = 0{,}8$ et $\mathbb{E}(T) = 5$.

**Réponse.** $H(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$ ; $\mathbb{P}(T = 1) = q$, $\mathbb{P}(T = 3) = pq^2$.

## Correction de l'exercice 14 – Clients et articles : une loi de Poisson composée

a) **Poisson composée** avec $G_X(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{6}$ :

$$G_S(t) = \exp\left(4\left(\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{6} - 1\right)\right) = \mathrm{e}^{-4}\exp\left(2t + \frac{4}{3}t^2 + \frac{2}{3}t^3\right)$$

b) On développe l'exponentielle jusqu'à l'ordre 2 :

$\exp\left(2t + \frac{4}{3}t^2 + \cdots\right) = 1 + 2t + \frac{4}{3}t^2 + \frac{(2t)^2}{2} + \cdots = 1 + 2t + \frac{10}{3}t^2 + \cdots$

— $\mathbb{P}(S = 0) = \mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}0183$ (aucun client) ;
— $\mathbb{P}(S = 1) = 2\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}0366$ ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\mathbb{P}(S=2) = \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}0611$.

— **Contrôle** de $\mathbb{P}(S=2)$ : un client qui achète 2 articles ($4\mathrm{e}^{-4} \times \frac{1}{3}$) ou deux clients qui en achètent un chacun ($8\mathrm{e}^{-4} \times \frac{1}{4}$) : total $\left(\frac{4}{3}+2\right)\mathrm{e}^{-4}$ ✓.

c) $\mathbb{E}(S) = 4\,\mathbb{E}(X) = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ articles.

**Réponse.** $G_S(t) = \mathrm{e}^{4(G_X(t)-1)}$ ; $\mathrm{e}^{-4}$, $2\mathrm{e}^{-4}$, $\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4}$ ; $\mathbb{E}(S) = \frac{20}{3}$.

## Correction de l’exercice 15 – Synthèse : début d’une épidémie

a) $G(s) = \mathrm{e}^{R(s-1)}$ et la probabilité d’extinction est le **plus petit point fixe** de $G$ dans $[0,1]$ :

$$u = \mathrm{e}^{R(u-1)}$$

b) $m = R = 0{,}8 \leq 1$ : extinction **certaine**. Taille totale moyenne $\frac{1}{1-0{,}8} = 5$ malades.

c) $\mathrm{e}^{2(0{,}203-1)} = \mathrm{e}^{-1{,}594} \approx 0{,}203$ ✓. La suite $u_{n+1} = G(u_n)$, $u_0 = 0$, est croissante et majorée par tout point fixe ; elle converge vers le plus petit, $u \approx 0{,}203$ (et non vers 1, car $m = 2 > 1$).

d) Les 5 lignées sont indépendantes ; l’épidémie s’éteint si **toutes** s’éteignent :

— $u^5 \approx 0{,}203^5 \approx 3{,}4 \times 10^{-4}$.

— **Lecture** : au-dessus du seuil $R = 1$, un cas isolé a encore 20 % de chances de ne rien déclencher, mais quelques cas simultanés rendent l’épidémie quasi certaine.

**Réponse.** $u = \mathrm{e}^{R(u-1)}$ ; $R = 0{,}8$ : extinction certaine, 5 malades en moyenne ; $R = 2$ : $u \approx 0{,}203$, $u^5 \approx 3{,}4 \times 10^{-4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).