# Plaquette 5 – Synthèse : résoudre des problèmes avec les génératrices

## Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Les cinq réflexes.**

— **Somme indépendante** : $G_{X+Y} = G_X G_Y$ (et non l'inverse : l'égalité n'entraîne pas l'indépendance).
— **Somme aléatoire** : $G_{\sum_{i \le N} X_i} = G_N \circ G_X$.
— **Premier pas** : $G_T(s) = \sum_k \mathbb{P}(\text{étape } k)\, s^{\text{durée}}\, G_{T_k}(s)$.
— **Mélange** : si $X$ suit $L_i$ avec probabilité $\pi_i$, $G_X = \sum_i \pi_i G_i$.
— **Parité** : $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \dfrac{1 + G_X(-1)}{2}$.

**Lecture.**

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} \qquad \mathbb{E}(X) = G_X'(1) \qquad \mathrm{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$$

**Coefficients utiles** : $\dfrac{(1-t^m)^r}{(1-t)^r} = \sum_j (-1)^j \binom{r}{j} t^{mj} \times \sum_k \binom{k+r-1}{r-1} t^k$.

## Correction de l'exercice 1 – Un dé décide du nombre de dés

a) **Somme aléatoire** de $N$ variables indépendantes de génératrice $G_D$, avec $N$ de génératrice $G_D$ :

$$G_S = G_D \circ G_D$$

b) $G_D(G_D(t)) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} G_D(t)^n$, et $G_D(t)^n$ commence par $\frac{t^n}{6^n}$.

— $\mathbb{P}(S = 1)$ : seul $n = 1$ contribue, $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
— $\mathbb{P}(S = 2)$ : $n = 1$ (coefficient $\frac{1}{6}$) et $n = 2$ (coefficient $\frac{1}{36}$), d'où $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) = \frac{7}{216}$.

c) **Wald** : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(D) = 3{,}5^2 = 12{,}25$. **Variance d'une somme aléatoire** :

$$\mathrm{V}(S) = \mathbb{E}(N)\mathrm{V}(D) + \mathrm{V}(N)\mathbb{E}(D)^2 = 3{,}5 \times \frac{35}{12} + \frac{35}{12} \times 12{,}25 \approx 45{,}94$$

**Réponse.** $G_S = G_D \circ G_D$ ; $\frac{1}{36}$, $\frac{7}{216}$ ; $\mathbb{E}(S) = 12{,}25$, $\mathrm{V}(S) \approx 45{,}94$.

## Correction de l'exercice 2 – Une série au meilleur des sept matchs

a) La série s'arrête au match $k$ gagné par A si A gagne le match $k$ et exactement 3 des $k-1$ précédents : probabilité $\binom{k-1}{3} p^4 q^{k-4}$ (loi de Pascal). On ajoute le cas symétrique où B l'emporte.

b) Pour $p = \frac{1}{2}$ : $\mathbb{P}(L = k) = 2\binom{k-1}{3}\frac{1}{2^k}$, soit $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{16}$ pour $k = 4, 5, 6, 7$ :

$$G_L(t) = \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{4} + \frac{5t^6}{16} + \frac{5t^7}{16}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\mathbb{E}(L) = G_L'(1) = \frac{4}{8} + \frac{5}{4} + \frac{30}{16} + \frac{35}{16} = \frac{93}{16} \approx 5{,}81$ matchs.

c) $\mathbb{P}(\text{A gagne}) = \sum_{k=4}^{7} \binom{k-1}{3} p^4 q^{k-4}$ avec $p = 0{,}6$ :

— $0{,}1296 \times (1 + 4 \times 0{,}4 + 10 \times 0{,}16 + 20 \times 0{,}064) = 0{,}1296 \times 5{,}48 \approx 0{,}710$.

— **Lecture** : un avantage de 60 % par match devient 71 % sur la série ; le format long favorise le meilleur.

**Réponse.** $\mathbb{E}(L) = \frac{93}{16}$ pour $p = \frac{1}{2}$ ; $\mathbb{P}(\text{A gagne}) \approx 0{,}710$ pour $p = 0{,}6$.

## Correction de l'exercice 3 – Somme des chiffres d'un nombre au hasard

a) L'application $n \mapsto (C_1, C_2, C_3)$ est une bijection de $\{0, \dots, 999\}$ sur $\{0, \dots, 9\}^3$ : le triplet est uniforme, donc ses coordonnées sont indépendantes et uniformes. **Indépendance** : $G_S = G_C^3$ avec $G_C(t) = \frac{1 + t + \cdots + t^9}{10} = \frac{1 - t^{10}}{10(1-t)}$.

b) Coefficient de $t^{13}$ dans $(1 - 3t^{10} + \cdots) \sum_k \binom{k+2}{2} t^k$ : seuls $k = 13$ et $k = 3$ comptent.

$$\binom{15}{2} - 3\binom{5}{2} = 105 - 30 = 75 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(S = 13) = \frac{75}{1\,000} = 0{,}075$$

— Le terme $-3\binom{5}{2}$ retire les triplets où un « chiffre » dépasserait 9.

c) $\mathbb{E}(C) = 4{,}5$ et $\mathrm{V}(C) = \frac{10^2 - 1}{12} = 8{,}25$, donc $\mathbb{E}(S) = 13{,}5$ et $\mathrm{V}(S) = 24{,}75$.

— **Remarque** : 13 et 14 sont les sommes les plus probables, symétriques autour de 13,5.

**Réponse.** $\mathbb{P}(S = 13) = 0{,}075$ ; $\mathbb{E}(S) = 13{,}5$, $\mathrm{V}(S) = 24{,}75$.

## Correction de l'exercice 4 – Le ticket chanceux

a) Les deux moitiés sont indépendantes et chacune a pour somme $k$ avec probabilité $\frac{a_k}{1\,000}$ :

$$\mathbb{P}(\text{chanceux}) = \sum_{k=0}^{27} \left(\frac{a_k}{1\,000}\right)^2 = \frac{\sum_k a_k^2}{10^6}$$

b) $A(t) = \sum_k a_k t^k = \left(\frac{1 - t^{10}}{1 - t}\right)^3$. La **symétrie** $a_k = a_{27-k}$ (remplacer chaque chiffre $c$ par $9 - c$) donne

— $\sum_k a_k^2 = \sum_k a_k a_{27-k}$ = coefficient de $t^{27}$ dans $A(t)^2 = \left(\frac{1 - t^{10}}{1 - t}\right)^6$.

— Ce coefficient vaut $\binom{32}{5} - 6\binom{22}{5} + 15\binom{12}{5} = 201\,376 - 158\,004 + 11\,880 = 55\,252$.

c) $\mathbb{P}(\text{chanceux}) = 0{,}055\,252$ : environ un ticket sur 18.

— **Interprétation** : c'est aussi la probabilité que la somme des 6 chiffres, où l'on remplace les trois derniers par leur complément à 9, vaille 27.

**Réponse.** $\mathbb{P} = \frac{\sum a_k^2}{10^6} = 0{,}055\,252$.

## Correction de l'exercice 5 – Combien de 6 avant le premier 1 ?

a) **Premier pas** : si le premier lancer est 1 (proba $\frac{1}{6}$), $N = 0$ ; si c'est 6 (proba $\frac{1}{6}$), on a un 6 de plus et tout recommence (facteur $t\,G_N$) ; sinon (proba $\frac{4}{6}$), tout recommence sans rien

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

compter.

b) On isole $G_N$ :

$$G_N(t)\left(\frac{2}{6}-\frac{t}{6}\right)=\frac{1}{6} \quad\Longrightarrow\quad G_N(t)=\frac{1}{2-t}=\frac{1/2}{1-t/2}$$

— Donc $\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{2^{k+1}}$ pour $k\geq 0$ (géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{1}{2}$), et $\mathbb{E}(N)=G_N'(1)=\frac{1}{(2-1)^2}=1$.

c) On ne regarde que les lancers donnant 1 ou 6 : chacun est un 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. $N$ est le nombre de 6 avant le premier 1 dans cette suite de « pile ou face » : géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

— **Lecture** : les faces 2 à 5 ne servent qu'à allonger la partie, pas à changer le résultat.

**Réponse.** $G_N(t)=\frac{1}{2-t}$ ; $\mathbb{P}(N=k)=2^{-(k+1)}$ ; $\mathbb{E}(N)=1$.

## Correction de l'exercice 6 – S'arrêter au premier garçon

a) $\mathbb{P}(F=k)=\frac{1}{2^{k+1}}$ ($k$ filles puis un garçon), d'où

$$G_F(t)=\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2-t} \qquad \mathbb{E}(F)=G_F'(1)=1$$

b) Chaque famille a exactement 1 garçon et en moyenne 1 fille. Sur $n$ familles, la loi des grands nombres donne environ $n$ garçons et $n$ filles : la proportion reste $\frac{1}{2}$.

— **Piège** : la règle d'arrêt ne peut pas modifier la proportion, car chaque naissance reste un garçon avec probabilité $\frac{1}{2}$, quelle que soit la stratégie.

c) $G_E(t)=tG_F(t)=\frac{t/2}{1-t/2}$ : $E\sim G\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{E}(E)=2$ et $\mathrm{V}(E)=\frac{1/2}{1/4}=2$.

**Réponse.** $G_F(t)=\frac{1}{2-t}$, $\mathbb{E}(F)=1$ ; proportion $\frac{1}{2}$ ; $E\sim G(\frac{1}{2})$, $\mathrm{V}(E)=2$.

## Correction de l'exercice 7 – Moments de la loi de Poisson et nombres de Bell

a) $M(u)=\mathbb{E}\left((\mathrm{e}^u)^X\right)=G_X(\mathrm{e}^u)=\exp(\mathrm{e}^u-1)$, le rayon de $G_X$ étant infini.

b) Posons $h(u)=\mathrm{e}^u-1$. Alors $M'=\mathrm{e}^uM$, puis

$$M''=\left(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{2u}\right)M \qquad M'''=\left(\mathrm{e}^u+3\mathrm{e}^{2u}+\mathrm{e}^{3u}\right)M$$

— En $u=0$ ($M(0)=1$) : $\mathbb{E}(X)=1$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)=2$, $\mathbb{E}\left(X^3\right)=5$.

c) $G_X^{(r)}(1)=1$ pour tout $r$ (loi de Poisson de paramètre 1), et $x^3=x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x$ donne $\mathbb{E}\left(X^3\right)=1+3+1=5$ ✓.

— **Culture** : $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ est le nombre de partitions d'un ensemble à $n$ éléments (nombre de Bell : $1, 2, 5, 15, 52, \ldots$).

**Réponse.** $M(u)=\exp(\mathrm{e}^u-1)$ ; $\mathbb{E}(X)=1$, $\mathbb{E}(X^2)=2$, $\mathbb{E}(X^3)=5$.

## Correction de l'exercice 8 – Relancer les dés qui ne font pas 6

a) Chaque dé fait son premier 6 au tour $T_i\sim G\left(\frac{1}{6}\right)$, indépendamment, et $T=\max(T_1,T_2,T_3)$. Donc $\mathbb{P}(T\leq k)=\prod_i\mathbb{P}(T_i\leq k)=\left(1-r^k\right)^3$ avec $r=\frac{5}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Formule de la queue** :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k\geq 0}\Big[1-\big(1-r^k\big)^3\Big] = \sum_{k\geq 0}\big(3r^k - 3r^{2k} + r^{3k}\big) = \frac{3}{1-r} - \frac{3}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3}$$

— Avec $r=\frac{5}{6}$ : $18 - \frac{108}{11} + \frac{216}{91} = \frac{10\,566}{1\,001} \approx 10{,}56$ tours.

c) Avec un seul dé, $\mathbb{E}(T_1) = 6$. Passer de 1 à 3 dés n'ajoute qu'environ 4,6 tours : le maximum croît lentement (comme $\ln n$ pour $n$ dés).

**Réponse.** $\mathbb{E}(T) = \frac{10\,566}{1\,001} \approx 10{,}56$ tours (contre 6 pour un dé).

## Correction de l'exercice 9 – Pannes pendant une durée géométrique

a) **Somme aléatoire** : $G_T(u) = \frac{0{,}1u}{1-0{,}9u}$ et $G_X(t) = \mathrm{e}^{0{,}2(t-1)}$, donc

$$G_S(t) = \frac{0{,}1\,\mathrm{e}^{0{,}2(t-1)}}{1-0{,}9\,\mathrm{e}^{0{,}2(t-1)}}$$

b) $\mathbb{P}(S=0) = G_S(0) = \frac{0{,}1\,\mathrm{e}^{-0{,}2}}{1-0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}2}} \approx \frac{0{,}0819}{0{,}2631} \approx 0{,}311$.

— **Interprétation** : il faut qu'aucun jour n'ait de panne ; chaque jour est « sans panne et dernier » avec probabilité $0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}2}$, ou « sans panne et pas dernier » avec probabilité $0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}2}$, d'où une série géométrique.

c) **Wald** : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\times 0{,}2 = 10\times 0{,}2 = 2$ micro-pannes.

**Réponse.** $G_S = G_T\circ G_X$ ; $\mathbb{P}(S=0)\approx 0{,}311$ ; $\mathbb{E}(S)=2$.

## Correction de l'exercice 10 – Une pièce choisie au hasard

a) **Mélange** : avec $C$ la pièce choisie,

$$G_X(t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1+t}{2}\Big)^{10} + \frac{1}{2}(0{,}2+0{,}8t)^{10}$$

b) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}(5+8) = 6{,}5$. **Variance totale** : $\mathbb{E}[\mathrm{V}(X\mid C)] = \frac{1}{2}(2{,}5+1{,}6) = 2{,}05$ et $\mathrm{V}[\mathbb{E}(X\mid C)] = 1{,}5^2 = 2{,}25$, donc $\mathrm{V}(X) = 4{,}3$.

— Le mélange est bien plus dispersé que chacune des deux binomiales.

c) $\mathbb{P}(X=10)$ est le coefficient dominant : $\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1\,024} + 0{,}8^{10}\Big) \approx \frac{1}{2}(0{,}000\,98 + 0{,}107\,4) \approx 0{,}054\,2$. **Bayes** :

— $\mathbb{P}(\text{truquée}\mid X=10) = \frac{0{,}8^{10}}{2^{-10}+0{,}8^{10}} \approx 0{,}991$.

**Réponse.** $\mathbb{E}(X)=6{,}5$, $\mathrm{V}(X)=4{,}3$ ; $\mathbb{P}(\text{truquée}\mid 10\text{ piles})\approx 0{,}991$.

## Correction de l'exercice 11 – Le duel

a) $T\sim G(p)$, donc $G_T(t) = \frac{pt}{1-qt}$.

b) A gagne si et seulement si $T$ est **impair** :

$$\mathbb{P}(T \text{ impair}) = \frac{1-G_T(-1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{p}{1+q}\Big) = \frac{1+q+p}{2(1+q)} = \frac{1}{1+q}$$

c) $p=\frac{1}{6}$ : $\mathbb{P}(\text{A gagne}) = \frac{1}{1+5/6} = \frac{6}{11} \approx 0{,}545$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Pas équitable** : tirer le premier donne un avantage, d'autant plus fort que $p$ est grand ($\frac{1}{1+q} \to \frac{1}{2}$ quand $p \to 0$, et $\to 1$ quand $p \to 1$).

— **Contrôle** : $\mathbb{P}(\text{A gagne}) = p + q^2\,\mathbb{P}(\text{A gagne})$ (A touche, ou les deux ratent et tout recommence) redonne $\frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}$ ✓.

**Réponse.** $\mathbb{P}(\text{A gagne}) = \frac{1}{1+q}$ ; $\frac{6}{11}$ pour $p = \frac{1}{6}$.

## Correction de l'exercice 12 – Contrôle de parité d'une transmission

a) $X \sim B(n, \varepsilon)$, $G_X(t) = (1-\varepsilon+\varepsilon t)^n$, et

$$\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \frac{1 + G_X(-1)}{2} = \frac{1 + (1-2\varepsilon)^n}{2}$$

b) Erreur non détectée : $X$ pair et $X \geq 2$, soit $\mathbb{P}(X \text{ pair}) - \mathbb{P}(X=0) = \frac{1+(1-2\varepsilon)^n}{2} - (1-\varepsilon)^n$.

c) $n = 8$, $\varepsilon = 0{,}01$ :

— erreur non détectée : $\frac{1+0{,}98^8}{2} - 0{,}99^8 \approx 0{,}002\,64$ ;

— au moins une erreur : $1 - 0{,}99^8 \approx 0{,}0773$.

— **Lecture** : le contrôle de parité attrape environ 97 % des messages erronés ; les 3 % restants sont presque tous des doubles erreurs ($\binom{8}{2}\varepsilon^2 \approx 0{,}0028$).

**Réponse.** $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \frac{1+(1-2\varepsilon)^n}{2}$ ; non détectée $\approx 0{,}0026$ contre $0{,}077$.

## Correction de l'exercice 13 – Produit des génératrices sans indépendance

a) Chaque ligne $i$ contient une case à $\frac{1}{9}$, une à $\frac{2}{9}$ et une à 0 : $\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{3}$. Idem pour chaque colonne. Mais $\mathbb{P}(X=0, Y=2) = 0 \neq \frac{1}{9}$ : **dépendance**.

b) Masses non nulles : $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$ à $\frac{1}{9}$ (sommes $0, 2, 4$) et $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$ à $\frac{2}{9}$ (sommes $1, 3, 2$). D'où la loi de $X+Y$ sur $\{0, \dots, 4\}$ :

— $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$.

— Or pour deux uniformes indépendantes, $G_X G_Y = \left(\frac{1+t+t^2}{3}\right)^2 = \frac{1+2t+3t^2+2t^3+t^4}{9}$ : mêmes coefficients.

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$$

c) L'implication « indépendance $\Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$ » n'a pas de réciproque : la génératrice de la somme ne voit que la loi de $X+Y$, pas celle du couple.

**Réponse.** Marginales uniformes, couple dépendant, et pourtant $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

## Correction de l'exercice 14 – Somme de deux géométriques et loi conditionnelle

a) **Indépendance** : $G_{X+Y}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^2 = p^2 t^2 \sum_{k \geq 0} (k+1) q^k t^k$, d'où

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = (n-1)p^2 q^{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

b) Pour $1 \leq k \leq n-1$ :

— $\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{pq^{k-1}pq^{n-k-1}}{(n-1)p^2q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Sachant $X+Y=n$, $X$ est **uniforme** sur $\{1,\dots,n-1\}$, quel que soit $p$.

c) $n=10$ : $\mathbb{P}(X=3 \mid X+Y=10)=\frac{1}{9}$.

— **Lecture** : connaître le total efface toute l'information sur $p$ ; c'est la propriété qui fait de $X+Y$ une statistique « exhaustive » pour $p$.

**Réponse.** $\mathbb{P}(X+Y=n)=(n-1)p^2q^{n-2}$ ; $X \mid X+Y=n$ uniforme sur $\{1,\dots,n-1\}$ ; $\frac{1}{9}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : gagner un jeu au tennis

a) **Premier pas** sur deux points : AA ou BB (proba $p^2+q^2$) termine en 2 points ; AB ou BA (proba $2pq$) ramène à l'égalité après 2 points. D'où l'équation, et

$$G_D(s)=\frac{(p^2+q^2)s^2}{1-2pqs^2}$$

— $D=2K$ avec $K\sim G(p^2+q^2)$ (nombre de paires jouées), donc $\mathbb{E}(D)=\frac{2}{p^2+q^2}$.

b) À chaque paire décisive, A gagne avec probabilité conditionnelle $\frac{p^2}{p^2+q^2}$, indépendamment du nombre de paires nulles jouées avant.

c) A gagne sans passer par l'égalité en 4, 5 ou 6 points : $p^4$, $\binom{4}{1}p^4q$, $\binom{5}{2}p^4q^2$ (le dernier point est gagné par A). Sinon, on arrive à 3-3 avec probabilité $\binom{6}{3}p^3q^3=20p^3q^3$, puis A gagne avec probabilité $\delta$.

d) $p=0{,}6$ : $p^2+q^2=0{,}52$, $\delta\approx 0{,}692$, $\mathbb{E}(D)\approx 3{,}85$ points.

— $\mathbb{P}(\text{A gagne})=0{,}1296\times 4{,}2+20\times 0{,}216\times 0{,}064\times 0{,}692\approx 0{,}544+0{,}191=0{,}736$.

— **Lecture** : 60 % des points donnent 74 % des jeux — le système de jeu amplifie l'avantage du meilleur joueur.

**Réponse.** $G_D(s)=\frac{(p^2+q^2)s^2}{1-2pqs^2}$ ; $\delta=\frac{p^2}{p^2+q^2}$ ; $\approx 0{,}736$ pour $p=0{,}6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).