Plaquette 1 – Fonction génératrice, moments et sommes de variables indépendantes

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule la **fonction génératrice** $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$, on en déduit la loi (unicité), les **moments** par dérivation en 1, et la loi d'une **somme** par produit des génératrices.

Exercice 1 – Génératrice d'une loi de Bernoulli

Calculer G_X pour $X \sim B(p)$, puis retrouver $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 2 – Génératrice de la loi binomiale

Déterminer G_X pour $X \sim B(n, p)$ de deux façons.

Exercice 3 – Génératrice de la loi de Poisson

Calculer G_X pour $X \sim P(\lambda)$ et en déduire ses moments.

Exercice 4 – Génératrice de la loi géométrique

Calculer G_X pour $X \sim G(p)$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 5 – Somme de variables indépendantes

Retrouver que $P(\lambda) + P(\mu) = P(\lambda + \mu)$ à l'aide des génératrices.

Exercice 6 – Identification d'une loi

Une variable X a pour génératrice $G_X(t) = \dfrac{t^2}{4 - 3t}$. Déterminer sa loi.

Exercice 7 – Somme d'un nombre aléatoire de variables

Une poule pond $N \sim P(\lambda)$ œufs ; chacun éclôt avec probabilité p, indépendamment. Retrouver la loi du nombre S d'éclosions par les génératrices.

Exercice 8 – Somme de deux dés

Utiliser les génératrices pour retrouver la loi de la somme de deux dés équilibrés.

Exercice 9 – Moments d'ordre supérieur

Soit $X \sim P(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(X^3\right)$ à l'aide de la génératrice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Processus de branchement

Chaque individu d'une population a 0, 1 ou 2 descendants avec probabilités $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. En partant d'un individu, calculer l'espérance de la taille de la génération 2.

Exercice 11 – Génératrice et fonction de répartition

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Exprimer $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n) t^n$ en fonction de G_X.

Exercice 12 – Moments de la loi uniforme par la génératrice

Soit X uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

a) Écrire $G_X(t)$ sous forme polynomiale.

b) Calculer $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$, et contrôler pour un dé.

Exercice 13 – Génératrice d'une transformée affine

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $a, b \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer G_{aX+b} en fonction de G_X.

b) Application : $X \sim P(\lambda)$. Donner G_{2X+1} et lire la loi de $2X+1$ sur ses coefficients.

c) Retrouver $\mathbb{E}(2X+1)$ par dérivation.

Exercice 14 – Rayon de convergence et existence des moments

a) Soit X de loi $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{6}{\pi^2 n^2}$ pour $n \geq 1$. Déterminer le rayon de convergence de G_X et le comportement de $G_X'(t)$ quand $t \to 1^-$. Conclure.

b) Montrer que si le rayon de G_X est $R > 1$, alors X admet des moments de tous ordres.

c) Exemple : $X \sim G(p)$.

Exercice 15 – Synthèse : temps d'attente du deuxième succès

On répète des épreuves de Bernoulli de paramètre p. Soit T le rang du **deuxième** succès. Déterminer G_T, puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{V}(T)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).