Plaquette 2 – Calculer avec les génératrices : coefficients, moments et dés

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Une génératrice se lit dans les deux sens : on **identifie** une loi en reconnaissant une génératrice usuelle (unicité), on **extrait** des probabilités par développement en série (éléments simples, binôme), on obtient les **moments** par dérivation en 1, et des événements arithmétiques (parité, reste modulo 3) en évaluant G_X en -1 ou en des racines de l'unité. Pour des **sommes indépendantes**, on multiplie les génératrices et l'on raisonne sur les polynômes.

Exercice 1 – Reconnaître une loi à sa génératrice

Identifier la loi de X (à valeurs dans $\mathbb{N}$) lorsque $G_X(t)$ vaut :

a) $\dfrac{(2+t)^3}{27}$;

b) $\dfrac{t}{2-t}$;

c) $\mathrm{e}^{2(t^2-1)}$;

d) $\dfrac{1+t+t^2}{3}\cdot t$.

Exercice 2 – Une génératrice rationnelle

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $G_X(t) = \dfrac{c}{(2-t)(3-t)}$.

a) Déterminer c.

b) Décomposer en éléments simples et en déduire $\mathbb{P}(X=n)$.

c) Interpréter X comme une somme de deux variables indépendantes.

d) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 – Moments factoriels de la loi binomiale

Soit $X \sim B(n,p)$.

a) Calculer $G_X^{(r)}(1)$ pour $r \geq 0$.

b) En déduire $\mathbb{E}\left(X^3\right)$ à l'aide de $x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$.

c) Application numérique : $n = 10$, $p = 0{,}3$.

Exercice 4 – Dérivée logarithmique de la génératrice

Soit X dont la génératrice est deux fois dérivable en 1, et $L = \ln G_X$ au voisinage de 1.

a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = L'(1)$ et $\mathrm{V}(X) = L''(1) + L'(1)$.

b) Retrouver ainsi espérance et variance de $P(\lambda)$ et de $B(n,p)$.

c) Même question pour la loi de Pascal de génératrice $\left(\dfrac{pt}{1-qt}\right)^r$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Probabilité d'être pair

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \dfrac{1 + G_X(-1)}{2}$.

b) Application : $X \sim P(\lambda)$; valeur pour $\lambda = 1$.

c) Application : $X \sim G(p)$; contrôler pour $p = \frac{1}{2}$ par une somme géométrique.

Exercice 6 – Reste modulo 3 et racines de l'unité

Soit $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Calculer $1 + j^n + j^{2n}$ selon le reste de n modulo 3, et en déduire $\mathbb{P}(X \equiv 0\ [3])$ en fonction de $G_X(1)$, $G_X(j)$, $G_X(j^2)$.

b) Application : $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Montrer que $\mathbb{P}(X \equiv 0\ [3]) = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2\cos(n\pi/3)}{2^n}\right)$.

c) Contrôler pour $n = 6$ par un calcul direct.

Exercice 7 – Loi de Poisson conditionnée à être non nulle

Un standard reçoit $X \sim P(\lambda)$ appels dans l'heure. On ne s'intéresse qu'aux heures où il y a eu au moins un appel : Y suit la loi de X sachant $X \geq 1$.

a) Exprimer G_Y à l'aide de G_X.

b) En déduire $\mathbb{E}(Y)$; valeur pour $\lambda = 2$.

c) Calculer $\mathrm{V}(Y)$ pour $\lambda = 2$.

Exercice 8 – Majoration exponentielle par la génératrice

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $a > 0$.

a) Montrer que pour tout $t \geq 1$ tel que $G_X(t)$ soit fini, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.

b) Application : $X \sim P(1)$ et $a = 5$. Optimiser en t.

c) Comparer à Markov et à la valeur exacte $\mathbb{P}(X \geq 5) \approx 0{,}0037$.

Exercice 9 – Trois dés : la somme 10

On lance trois dés équilibrés indépendants ; S est la somme.

a) Montrer que $G_S(t) = \dfrac{t^3}{216} \cdot \dfrac{(1 - t^6)^3}{(1 - t)^3}$.

b) En utilisant $\dfrac{1}{(1-t)^3} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+2}{2} t^k$, calculer $\mathbb{P}(S = 10)$.

c) Calculer de même $\mathbb{P}(S = 9)$ et commenter (problème du grand-duc de Toscane).

Exercice 10 – Simuler un dé à 36 faces avec deux dés

On dispose de deux dés à six faces équilibrés et indépendants. Le premier porte les numéros $0, 1, 2, 3, 4, 5$, le second les numéros $0, 6, 12, 18, 24, 30$.

a) Écrire les génératrices G_U et G_V des deux résultats.

b) Montrer que $U + V$ est uniforme sur $\{0, \ldots, 35\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Proposer de même trois dés à 6, 6 et 6 faces simulant un dé uniforme sur $\{0, \dots, 215\}$.

Exercice 11 – Pas de dés pipés à somme uniforme

On veut piper deux dés (faces 1 à 6, probabilités $a_1, \dots, a_6$ et $b_1, \dots, b_6$) pour que la somme soit **uniforme** sur $\{2, \dots, 12\}$.

a) Traduire la condition sur les polynômes $A(t) = \sum_k a_k t^{k-1}$ et $B(t) = \sum_k b_k t^{k-1}$.

b) Montrer que $a_6 b_6 > 0$, puis que A et B ont chacun une racine réelle.

c) Montrer que $1 + t + \cdots + t^{10}$ n'a pas de racine réelle et conclure.

Exercice 12 – Les dés de Sicherman

Un dé porte les faces $1, 2, 2, 3, 3, 4$, un autre les faces $1, 3, 4, 5, 6, 8$ (chaque face a probabilité $\frac{1}{6}$).

a) Écrire leurs génératrices.

b) Factoriser $t + t^2 + \cdots + t^6 = t(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$ et vérifier que les deux dés donnent la même loi de somme que deux dés ordinaires.

c) Contrôler sur la probabilité d'obtenir 12.

Exercice 13 – Une loi déterminée par ses moments factoriels

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = 2^r$.

a) Pour $u \geq 0$, montrer que $\mathbb{E}\left[(1+u)^X\right] = \sum_{r \geq 0} \frac{2^r u^r}{r!} = \mathrm{e}^{2u}$.

b) En déduire que le rayon de G_X est infini et que $G_X(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}$ pour $t \geq 1$, puis pour tout t.

c) Conclure sur la loi de X.

Exercice 14 – Somme de Bernoulli de paramètres différents

Soient $B_1, \dots, B_n$ indépendantes avec $B_i \sim B\left(\frac{1}{i+1}\right)$, et $X = B_1 + \cdots + B_n$.

a) Montrer que $G_X(t) = \dfrac{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}{(n+1)!}$.

b) En déduire $\mathbb{P}(X=0)$ et $\mathbb{P}(X=1)$.

c) Application $n = 3$: donner toute la loi.

Exercice 15 – Synthèse : attendre deux piles consécutifs

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux piles consécutifs ; T est le nombre de lancers.

a) En conditionnant par le début (F, PF ou PP), montrer que $G_T(t) = \frac{t}{2} G_T(t) + \frac{t^2}{4} G_T(t) + \frac{t^2}{4}$.

b) En déduire $G_T(t) = \dfrac{t^2}{4 - 2t - t^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $\mathbb{P}(T = n) = \dfrac{F_{n-1}}{2^n}$, où (F_k) est la suite de Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1$).

d) Calculer $\mathbb{E}(T)$; on admet $\mathrm{V}(T) = 22$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).