Plaquette 4 – Marches aléatoires, temps d'attente et dénombrement

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On traduit une **relation de récurrence** (premier pas, insertion d'un élément, dernier pas) en **équation sur la génératrice** : produit pour une convolution, équation du second degré pour un passage en deux étapes, $U = \frac{1}{1-F}$ pour un renouvellement. On résout, puis on **développe** (binôme généralisé, éléments simples) pour lire les probabilités, ou on **dérive en** 1 pour l'espérance.

Exercice 1 – Retours en zéro d'une marche symétrique

Une marche part de 0 et fait des pas ± 1 équiprobables et indépendants. Soit u_{2n} la probabilité d'être en 0 à l'instant $2n$.

a) Montrer que $u_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

b) En déduire $U(s) = \sum_{n \geq 0} u_{2n} s^{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ pour $|s| < 1$.

c) Calculer l'espérance du nombre de passages en 0 avant l'instant $2N$, et montrer qu'elle tend vers $+\infty$.

Exercice 2 – Premier retour en zéro : équation de renouvellement

Avec la marche symétrique précédente, soit T l'instant du premier retour en 0 (éventuellement infini) et $f_{2n} = \mathbb{P}(T = 2n)$.

a) Justifier que $u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}$ pour $n \geq 1$.

b) En déduire $F(s) = \sum_{n \geq 1} f_{2n} s^{2n} = 1 - \sqrt{1-s^2}$.

c) Montrer que le retour en 0 est certain mais que $\mathbb{E}(T) = +\infty$.

Exercice 3 – Loi explicite du premier retour

On reprend $F(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$.

a) En dérivant puis en intégrant $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x}$, montrer que

$$1 - \sqrt{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n} x^n.$$

b) En déduire $\mathbb{P}(T = 2n)$, puis $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 4)$, $\mathbb{P}(T = 6)$.

c) Vérifier $\mathbb{P}(T = 4)$ en énumérant les chemins.

Exercice 4 – Ne pas revenir pendant longtemps

Avec les notations précédentes (T premier retour, u_{2n} probabilité d'être en 0 au temps $2n$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(T>2n)s^{2n}=\dfrac{1-F(s)}{1-s^2}$.

b) En déduire l'identité $\mathbb{P}(T>2n)=u_{2n}$.

c) Estimer la probabilité de ne pas être revenu en 0 après 100 pas.

Exercice 5 – Premier passage au-dessus de zéro

Une marche part de 0, fait $+1$ avec probabilité p et -1 avec probabilité $q=1-p$. Soit T l'instant du premier passage en $+1$ et $G=G_T$.

a) En conditionnant par le premier pas, montrer que $G(s)=ps+qs\,G(s)^2$.

b) En déduire $G(s)=\dfrac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$ pour $0<s<1$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(T<+\infty)=\min\left(1,\frac{p}{q}\right)$. Application : $p=0{,}4$.

Exercice 6 – Temps moyen d'atteinte d'une marche biaisée

On garde la marche précédente avec $p>q$, et $G(s)=ps+qsG(s)^2$.

a) En dérivant cette relation en $s=1$ (on admet que $G'(1)$ est fini), calculer $\mathbb{E}(T)$.

b) Application : $p=0{,}6$.

c) Que se passe-t-il si $p=q=\frac{1}{2}$?

Exercice 7 – Retour en zéro d'une marche biaisée

Marche de pas $+1$ (probabilité p) et -1 (probabilité q), avec $p\neq q$.

a) Montrer que $U(s)=\sum_n u_{2n}s^{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$.

b) En déduire la génératrice F du premier retour et $\mathbb{P}$(retour en 0).

c) Application $p=0{,}6$: probabilité de retour et nombre moyen de retours.

Exercice 8 – Monter un escalier au hasard

On monte un escalier en faisant, indépendamment, des pas de 1 ou 2 marches avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Soit p_n la probabilité de **poser le pied** sur la marche n ($p_0=1$).

a) Justifier $p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$ pour $n\geq 2$, et $p_1=\frac{1}{2}$.

b) En déduire $P(s)=\sum_n p_n s^n=\dfrac{1}{(1-s)\left(1+\frac{s}{2}\right)}$.

c) Décomposer en éléments simples et donner p_n ; limite ?

Exercice 9 – Génératrice du nombre de cycles

Soit $c(n,k)$ le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant k cycles et $P_n(t)=\sum_k c(n,k)t^k$.

a) En insérant l'élément $n+1$ dans une permutation de $\{1,\dots,n\}$, montrer que $c(n+1,k)=c(n,k-1)+n\,c(n,k)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire $P_n(t) = t(t+1)\cdots(t+n-1)$, puis la génératrice du nombre C_n de cycles d'une permutation uniforme.

c) Retrouver $\mathbb{E}(C_n)$ et $\mathrm{V}(C_n)$; valeurs pour $n = 5$.

Exercice 10 – Génératrice du nombre d'inversions

Soit I_n le nombre d'inversions d'une permutation uniforme de S_n.

a) En insérant la valeur n à l'une des n positions d'une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$, montrer que $G_{I_n}(t) = G_{I_{n-1}}(t) \cdot \dfrac{1 + t + \cdots + t^{n-1}}{n}$.

b) En déduire $G_{I_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \dfrac{1 - t^j}{j(1-t)}$, puis $\mathbb{P}(I_n = 0)$ et $\mathbb{P}(I_n = 1)$.

c) Application $n = 4$.

Exercice 11 – Loi exacte du collectionneur à trois vignettes

On achète des vignettes uniformes parmi 3 modèles jusqu'à les avoir tous ; T est le nombre d'achats.

a) Écrire $T = 1 + G_2 + G_3$ avec des géométriques indépendantes et en déduire $G_T(t) = \dfrac{2t^3}{9\left(1 - \frac{t}{3}\right)\left(1 - \frac{2t}{3}\right)}$.

b) Décomposer en éléments simples et en déduire $\mathbb{P}(T = k)$ pour $k \geq 3$.

c) Vérifier $\mathbb{P}(T = 3)$ et $\mathbb{P}(T = 4)$, puis calculer $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 12 – Mots sans deux 1 consécutifs

On tire un mot binaire de longueur n uniformément (bits indépendants équiprobables). Soit a_n le nombre de mots de longueur n sans deux 1 consécutifs ($a_0 = 1$, $a_1 = 2$).

a) Montrer que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

b) En déduire $A(x) = \sum_n a_n x^n = \dfrac{1 + x}{1 - x - x^2}$.

c) Calculer la probabilité qu'un mot de longueur 10 n'ait pas deux 1 consécutifs, et l'ordre de grandeur pour n grand.

Exercice 13 – Les motifs PF et PP n'ont pas la même loi

On lance une pièce équilibrée. Soit T_{PF} le nombre de lancers pour voir apparaître « pile puis face », et T_{PP} celui pour « pile puis pile », dont on admet $G_{T_{PP}}(t) = \dfrac{t^2}{4 - 2t - t^2}$, $\mathbb{E}(T_{PP}) = 6$ et $\mathrm{V}(T_{PP}) = 22$.

a) Montrer que T_{PF} est la somme de deux variables indépendantes de loi $G\left(\frac{1}{2}\right)$ et donner $G_{T_{PF}}$.

b) Calculer $\mathbb{E}(T_{PF})$ et $\mathrm{V}(T_{PF})$.

c) Comparer $\mathbb{P}(T_{PF} = 4)$ et $\mathbb{P}(T_{PP} = 4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Arrivées pendant un service

Un guichetier sert un client en D minutes, D uniforme sur $\{1,2,3\}$. Pendant chaque minute, il arrive un nombre de clients de loi $P(1)$, indépendamment ; soit A le nombre de clients arrivés pendant le service.

a) Montrer que $G_A(t) = G_D\left(\mathrm{e}^{t-1}\right)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A=0)$ et $\mathbb{E}(A)$.

c) Le guichet est-il stable (en moyenne, arrive-t-il moins d'un client par service) ?

Exercice 15 – Synthèse : la case du jeu de l'oie

Un pion avance de la valeur d'un dé équilibré à chaque tour, indépendamment. Soit p_n la probabilité que le pion s'arrête **exactement** sur la case n ($p_0 = 1$) et $D(s) = \dfrac{s+\cdots+s^6}{6}$.

a) Justifier $p_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} p_{n-k}$ (avec $p_m = 0$ si $m<0$) pour $n \geq 1$.

b) En déduire $P(s) = \sum_n p_n s^n = \dfrac{1}{1-D(s)}$.

c) Montrer que $p_n = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$ pour $1 \leq n \leq 6$, puis calculer p_7.

d) On admet que $(1-s)P(s) \to \lim p_n$ quand $s \to 1^-$. Calculer cette limite et l'interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).