Plaquette 3 – Sommes aléatoires et processus de branchement

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour une somme d'un **nombre aléatoire** de termes indépendants, on conditionne par le nombre de termes : la génératrice de la somme est la **composée** $G_N \circ G_X$. Un processus de branchement itère cette composition : $G_{Z_n} = G \circ \cdots \circ G$. La probabilité d'extinction est la **limite** de $G^{\circ n}(0)$, c'est-à-dire le **plus petit point fixe** de G sur $[0,1]$; on l'étudie grâce à la **convexité** de G.

Exercice 1 – Génératrice d'une somme aléatoire

Soient $N, X_1, X_2, \ldots$ des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, les X_i de même loi que X. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (avec $S = 0$ si $N = 0$).

a) Montrer que $G_S(t) = G_N(G_X(t))$ pour $t \in [-1,1]$.

b) En déduire $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$ lorsque ces espérances sont finies.

c) Exemple : $N \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ et $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Reconnaître la loi de S.

Exercice 2 – Variance d'une somme aléatoire

Avec les notations de la somme aléatoire $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, on suppose N et X de carré intégrable.

a) Calculer $G_S''(1)$ en fonction des dérivées de G_N et G_X en 1.

b) En déduire $\mathrm{V}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(N)\,\mathbb{E}(X)^2$.

c) Application : $N \sim P(\lambda)$.

Exercice 3 – Amincissement d'une loi de Poisson

Une poule pond $N \sim P(\lambda)$ œufs ; chacun éclot avec probabilité p, indépendamment. Soit E le nombre d'œufs éclos et $F = N - E$ le nombre d'œufs non éclos.

a) Déterminer la loi de E par les génératrices.

b) Déterminer la loi de F.

c) Application : $\lambda = 8$, $p = 0{,}75$: probabilité qu'aucun œuf n'éclose.

Exercice 4 – Amincissement d'une loi binomiale

Un lot de n pièces passe deux contrôles successifs : chaque pièce passe le premier avec probabilité p, puis, si elle l'a passé, le second avec probabilité r, indépendamment. Soit X le nombre de pièces passant les deux contrôles.

a) Montrer, par les génératrices, que $X \sim B(n, pr)$.

b) Retrouver ce résultat sans calcul.

c) Application : $n = 50$, $p = 0{,}9$, $r = 0{,}8$; espérance et variance de X.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une somme géométrique de géométriques

Un joueur dispute des parties ; chaque partie dure $X_i \sim G(r)$ coups (sur $\mathbb{N}^*$). Après chaque partie, il en rejoue une autre avec probabilité $q = 1 - p$; le nombre de parties est donc $N \sim G(p)$. Toutes ces variables sont indépendantes. Soit S le nombre total de coups.

a) Calculer G_S et reconnaître la loi de S.

b) Retrouver $\mathbb{E}(S)$ par la formule de Wald.

c) Interpréter le résultat.

Exercice 6 – Un dé puis des pièces

On lance un dé équilibré ; s'il donne N, on lance N pièces équilibrées. Soit S le nombre de piles.

a) Exprimer G_S à l'aide de $G_N(u) = \frac{1}{6}(u + \cdots + u^6)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$ et $\mathbb{P}(S = 6)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$.

Exercice 7 – Accidents et blessés

Sur un tronçon d'autoroute, le nombre d'accidents par semaine suit $P(3)$; chaque accident fait 0, 1 ou 2 blessés avec probabilité $\frac{1}{3}$ chacun, indépendamment. Soit S le nombre de blessés de la semaine.

a) Donner G_S.

b) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$ et $\mathbb{P}(S = 1)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

Exercice 8 – Génératrice des générations d'un branchement

Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants, de génératrice G et de moyenne m, indépendamment des autres. On part de $Z_0 = 1$ et Z_{n+1} est la somme des descendants des Z_n individus de la génération n.

a) Montrer que $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G$, puis que $G_{Z_n} = G^{\circ n}$.

b) En déduire $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

c) Exemple : $G(s) = \frac{1+s^2}{2}$ (zéro ou deux enfants). Calculer G_{Z_2} et $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$.

Exercice 9 – Probabilité d'extinction : le plus petit point fixe

On reprend un processus de branchement de génératrice G, et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = G^{\circ n}(0)$.

a) Montrer que (u_n) est croissante et converge vers une limite u vérifiant $G(u) = u$.

b) Montrer que u est le plus petit point fixe de G dans $[0, 1]$.

c) Application : $G(s) = 0{,}2 + 0{,}4s + 0{,}4s^2$. Calculer u_1, u_2, u_3 et u.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Extinction certaine des processus sous-critiques

Soit G la génératrice de la loi de reproduction, de moyenne $m = G'(1)$ finie, avec $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ et $\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$.

a) Montrer que G est strictement convexe sur $[0, 1]$.

b) En déduire que si $m \leq 1$, le seul point fixe de G dans $[0, 1]$ est 1.

c) Montrer que si $m > 1$, G a un point fixe dans $[0, 1[$. Conclure sur l'extinction.

Exercice 11 – Descendance géométrique

Chaque individu a X descendants avec $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ pour $k \geq 0$ ($0 < p < 1$, $q = 1 - p$).

a) Calculer G et m.

b) Déterminer la probabilité d'extinction u selon p.

c) Application : $p = \frac{1}{3}$; puis $p = \frac{2}{3}$.

Exercice 12 – Taille totale d'une lignée sous-critique

Dans un processus de branchement de moyenne $m < 1$, on note $T = \sum_{n \geq 0} Z_n$ le nombre total d'individus ayant existé.

a) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{1 - m}$.

b) Application : chaque individu a $X \sim B(2; 0{,}4)$ enfants.

c) Une chaîne de courriels : chaque destinataire transfère le message à X personnes, $X \sim P(0{,}9)$. Nombre moyen de personnes touchées ?

Exercice 13 – Génératrice de la descendance totale

Chaque cellule se divise en deux avec probabilité p ou meurt sans descendance avec probabilité $q = 1 - p$, avec $p < \frac{1}{2}$. Soit T le nombre total de cellules ayant existé et $H = G_T$.

a) En conditionnant par le sort de la première cellule, montrer que $H(s) = s\left(q + pH(s)^2\right)$.

b) En déduire $H(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$ pour $0 < s \leq 1$.

c) Retrouver $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = 3)$ sur le développement, puis donner les valeurs pour $p = 0{,}4$.

Exercice 14 – Clients et articles : une loi de Poisson composée

Il entre $N \sim P(4)$ clients par heure dans une boutique ; chacun achète 1, 2 ou 3 articles avec probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, indépendamment. Soit S le nombre d'articles vendus dans l'heure.

a) Donner G_S.

b) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$, $\mathbb{P}(S = 1)$, $\mathbb{P}(S = 2)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : début d’une épidémie

Au début d’une épidémie, chaque malade contamine $X \sim P(R)$ personnes, indépendamment ; on modélise par un processus de branchement issu d’un seul malade.

a) Montrer que la probabilité u que l’épidémie s’éteigne vérifie $u = \mathrm{e}^{R(u-1)}$.

b) Pour $R = 0{,}8$: extinction ? nombre moyen de malades au total ?

c) Pour $R = 2$: on donne $u \approx 0{,}203$. Vérifier que cette valeur est un point fixe, et justifier que $u_n = G^{\circ n}(0)$ y converge.

d) Avec $R = 2$ et 5 malades initiaux indépendants, quelle est la probabilité d’extinction ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).