Plaquette 5 – Synthèse : résoudre des problèmes avec les génératrices

Séries génératrices — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Devant un problème, on se demande quelle **structure** la génératrice va transformer en calcul : une **somme indépendante** (produit), une **somme aléatoire** (composition), une **récurrence par le premier pas** (équation sur G), un **mélange** (moyenne des génératrices), une **condition arithmétique** (évaluation en -1 ou en des racines de l'unité). On écrit la génératrice, puis on lit coefficients, valeur en 1 et dérivées en 1.

Exercice 1 – Un dé décide du nombre de dés

On lance un dé ; s'il donne N, on lance N dés et on note S la somme obtenue.

a) Exprimer G_S en fonction de $G_D(t) = \frac{t + \cdots + t^6}{6}$.

b) Calculer $\mathbb{P}(S = 1)$ et $\mathbb{P}(S = 2)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

Exercice 2 – Une série au meilleur des sept matchs

Deux équipes jouent jusqu'à ce que l'une gagne 4 matchs ; l'équipe A gagne chaque match avec probabilité p, indépendamment. Soit L le nombre de matchs joués.

a) Pour $4 \leq k \leq 7$, montrer que $\mathbb{P}(L = k) = \binom{k-1}{3}\left(p^4 q^{k-4} + q^4 p^{k-4}\right)$.

b) Pour $p = \frac{1}{2}$, écrire G_L et calculer $\mathbb{E}(L)$.

c) Pour $p = 0{,}6$, calculer la probabilité que A gagne la série.

Exercice 3 – Somme des chiffres d'un nombre au hasard

On tire un entier uniforme entre 0 et 999, écrit avec trois chiffres $C_1C_2C_3$ (zéros initiaux compris). Soit $S = C_1 + C_2 + C_3$.

a) Montrer que les chiffres sont indépendants et uniformes sur $\{0, \ldots, 9\}$, puis que $G_S(t) = \frac{1}{1\,000}\left(\frac{1 - t^{10}}{1 - t}\right)^3$.

b) Calculer $\mathbb{P}(S = 13)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

Exercice 4 – Le ticket chanceux

Un ticket porte un numéro uniforme à 6 chiffres (000000 à 999999). Il est « chanceux » si la somme des trois premiers chiffres égale celle des trois derniers. On note a_k le nombre de triplets de chiffres de somme k.

a) Exprimer la probabilité d'un ticket chanceux à l'aide des a_k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $\sum_k a_k^2$ est le coefficient de t^{27} dans $\left(\frac{1-t^{10}}{1-t}\right)^6$. (Indication : $a_k = a_{27-k}$.)
c) On donne $\sum_k a_k^2 = 55\,252$. Conclure.

Exercice 5 – Combien de 6 avant le premier 1 ?

On lance un dé jusqu'au premier 1 ; soit N le nombre de 6 obtenus avant ce 1.

a) En conditionnant par le premier lancer, montrer que $G_N(t) = \frac{1}{6} + \frac{t}{6}G_N(t) + \frac{4}{6}G_N(t)$.
b) En déduire la loi de N et $\mathbb{E}(N)$.
c) Interpréter le résultat par un argument direct.

Exercice 6 – S'arrêter au premier garçon

Dans un pays, chaque famille a des enfants jusqu'à la naissance du premier garçon, puis s'arrête. Chaque naissance est un garçon avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment.

a) Donner la génératrice du nombre F de filles d'une famille, puis $\mathbb{E}(F)$.
b) Quelle est la proportion moyenne de garçons dans la population ?
c) Donner la loi du nombre total d'enfants $E = F + 1$ et $\mathrm{V}(E)$.

Exercice 7 – Moments de la loi de Poisson et nombres de Bell

Soit $X \sim P(1)$ et $M(u) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{uX}\right)$.

a) Exprimer $M(u)$ à l'aide de G_X et montrer que $M(u) = \exp(\mathrm{e}^u - 1)$.
b) On admet que $\mathbb{E}\left(X^n\right) = M^{(n)}(0)$. Calculer $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ pour $n = 1, 2, 3$.
c) Retrouver $\mathbb{E}\left(X^3\right)$ par les moments factoriels.

Exercice 8 – Relancer les dés qui ne font pas 6

On lance 3 dés ; on met de côté ceux qui font 6 et on relance les autres, jusqu'à ce que tous aient fait 6. Soit T le nombre de tours.

a) Montrer que $\mathbb{P}(T \le k) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^3$.
b) À l'aide de la formule de la queue (génératrice $\frac{1 - G_T(t)}{1-t}$ en $t = 1$), calculer $\mathbb{E}(T)$ exactement.
c) Comparer avec un seul dé.

Exercice 9 – Pannes pendant une durée géométrique

Une machine reste en service $T \sim G(0{,}1)$ jours ; chaque jour de service, elle subit un nombre de micro-pannes de loi $P(0{,}2)$, indépendamment. Soit S le nombre total de micro-pannes.

a) Donner G_S.
b) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$.
c) Calculer $\mathbb{E}(S)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Une pièce choisie au hasard

Un sac contient une pièce équilibrée et une pièce truquée qui donne pile avec probabilité 0,8. On choisit une pièce au hasard et on la lance 10 fois ; X est le nombre de piles.

a) Écrire G_X (formule des probabilités totales).

b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

c) On obtient 10 piles. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?

Exercice 11 – Le duel

Deux tireurs A et B tirent à tour de rôle, A commençant ; chaque tir atteint la cible avec probabilité p, indépendamment, et le premier qui touche gagne. Soit T le numéro du tir gagnant.

a) Donner G_T.

b) À l'aide de $G_T(-1)$, calculer la probabilité que A gagne.

c) Application : $p = \frac{1}{6}$. Le duel est-il équitable ?

Exercice 12 – Contrôle de parité d'une transmission

On transmet n bits ; chacun est inversé avec probabilité ε, indépendamment. Un bit de parité détecte l'erreur si et seulement si le nombre X de bits inversés est **impair**.

a) Calculer $\mathbb{P}(X \text{ pair})$ à l'aide de G_X.

b) En déduire la probabilité d'une erreur **non détectée**.

c) Application : $n = 8$, $\varepsilon = 0{,}01$. Comparer avec la probabilité qu'il y ait au moins une erreur.

Exercice 13 – Produit des génératrices sans indépendance

Soit (X, Y) à valeurs dans $\{0,1,2\}^2$, avec $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{2}{9}$ si $j \equiv i+1\ [3]$, 0 si $j \equiv i+2\ [3]$, et $\frac{1}{9}$ si $j = i$.

a) Vérifier que X et Y sont uniformes sur $\{0,1,2\}$ et ne sont pas indépendantes.

b) Calculer la loi de $X+Y$ et montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

c) Que retenir ?

Exercice 14 – Somme de deux géométriques et loi conditionnelle

Soient X, Y indépendantes de loi $G(p)$.

a) Calculer G_{X+Y} et en déduire $\mathbb{P}(X+Y=n)$ pour $n \geq 2$.

b) Déterminer la loi de X sachant $X+Y=n$.

c) Application : deux joueurs lancent chacun un dé jusqu'à obtenir un 6 ; au total, il a fallu 10 lancers. Quelle est la probabilité que le premier joueur en ait fait 3 ?

Exercice 15 – Synthèse : gagner un jeu au tennis

Au tennis, un jeu est gagné par le premier joueur qui marque 4 points avec 2 points d'écart. Le serveur A gagne chaque point avec probabilité p, indépendamment ($q = 1-p$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) À partir de l'égalité (3-3), soit D le nombre de points restant à jouer. Montrer que $G_D(s) = (p^2 + q^2)s^2 + 2pqs^2 G_D(s)$, et en déduire G_D et $\mathbb{E}(D)$.

b) Montrer que A gagne depuis l'égalité avec probabilité $\delta = \dfrac{p^2}{p^2 + q^2}$.

c) En déduire la probabilité que A gagne le jeu : $p^4\left(1 + 4q + 10q^2\right) + 20p^3q^3\delta$.

d) Application : $p = 0{,}6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).