Plaquette 5 – Calculs de sommes et problèmes de synthèse

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Sommes géométriques sous l'intégrale. Pour $|x| \leq 1$, $x \neq -1$:

$$\sum_{k=0}^{N} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}, \qquad \left|\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{N+2}$$

Sommes de référence. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$; $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ et $\sum_{n\geq 0} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ pour $|x|<1$.

Télescopages utiles. $\arctan b - \arctan a = \arctan \frac{b-a}{1+ab}$ (pour $a, b \geq 0$) ; $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

Correction de l'exercice 1 – Décomposition en éléments simples et télescopage

a) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, donc par télescopage

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}$$

b) $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$: la somme vaut $\frac{1}{1!} = 1$.

c) $n^2 = n(n-1) + n$, donc pour $n \geq 2$, $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$, et $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!} = \mathrm{e} + \mathrm{e}$ (les termes $n = 0, 1$ se recollent : 0 et $1 = \frac{1}{0!}$). Avec $\sum \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, le total vaut $3\mathrm{e} \approx 8{,}155$.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$; b) 1 ; c) $3\mathrm{e}$.

Correction de l'exercice 2 – Somme arctangente

a) $\theta = \arctan(n+1) - \arctan n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta = \frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n+1}$: comme θ est dans l'intervalle où tan est bijective vers $[0, +\infty[$, $\theta = \arctan\frac{1}{n^2+n+1}$.

b) Par télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(N+1) - \arctan 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

c) De même $\arctan\frac{2}{n^2} = \arctan(n+1) - \arctan(n-1)$ (télescopage à deux pas), donc $\sum_{n=1}^{N} = \arctan(N+1) + \arctan N - \arctan 1 - \arctan 0 \to \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Réponse. $\sum_{n\geq 0} \arctan\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$; $\sum_{n\geq 1} \arctan\frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 3 – La série de Leibniz

a) $\frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 (-x^2)^k\,\mathrm{d}x$, et on somme la série géométrique de raison $-x^2$ (somme finie,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

linéarité de l'intégrale).

b) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \right| \le \int_0^1 x^{2N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+3} \longrightarrow 0$$

c) L'erreur sur $\pi = 4 \times \frac{\pi}{4}$ est $\le \frac{4}{2N+3}$; il faut $2N+3 \ge 4000$, soit $N \ge 1999$: environ 2 000 termes. La convergence est très lente (en $\frac{1}{N}$), d'où l'intérêt des formules de type Machin.

Réponse. $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, reste $\le \frac{1}{2N+3}$; environ 2 000 termes pour π à 10^{-3}.

Correction de l'exercice 4 – Série logarithmique

a) $\frac{x^n}{n} = \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t$, et $\sum_{n=1}^{N} t^{n-1} = \frac{1-t^N}{1-t}$; or $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x)$.

b) Si $0 \le x < 1$: $0 \le \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{1-x}\int_0^x t^N\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{(1-x)(N+1)}$. Si $-1 \le x < 0$: $|1-t| \ge 1$ sur $[x, 0]$, donc

$$\left| \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t \right| \le \int_x^0 |t|^N\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{N+1}$$

Dans les deux cas, le reste tend vers 0.

c) $x = \frac{1}{2}$: $\sum \frac{1}{n2^n} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$. $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, donc $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Réponse. $\sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ sur $[-1, 1[$; $\sum \frac{1}{n2^n} = \ln 2$, $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Correction de l'exercice 5 – Sommes de polynômes fois une géométrique

a) $T_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1}$ et, en dérivant le quotient, $T_N'(x) = \frac{1-(N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}$. Comme $N^a x^N \to 0$ pour $|x| < 1$, on obtient la limite $\frac{1}{(1-x)^2}$.

b) De même avec T_N'' (les termes en $N^2 x^N$ tendent vers 0) : $\sum_{n \ge 2} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. Alors $n^2 = n(n-1) + n$ donne

$$\sum_{n \ge 1} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

c) $x = \frac{1}{2}$: $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$. Si $P(X=n) = \frac{1}{2^n}$ $(n \ge 1)$, alors $E(X^2) = 6$; avec $E(X) = 2$, la variance vaut $6 - 4 = 2$.

Réponse. $\sum n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$; $\sum \frac{n^2}{2^n} = 6$; $V(X) = 2$.

Correction de l'exercice 6 – Produit de cosinus et formule de Viète

a) $N = 1$: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Si c'est vrai au rang N, on remplace $\sin\frac{x}{2^N} = 2\sin\frac{x}{2^{N+1}}\cos\frac{x}{2^{N+1}}$.

b) En prenant le logarithme (tous les facteurs sont > 0) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\frac{x}{2^n} = \ln\frac{\sin x}{2^N \sin(x/2^N)} \longrightarrow \ln\frac{\sin x}{x}$$

car $2^N \sin\frac{x}{2^N} \to x$.

c) $\prod_{n\ge 1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$. Or $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ donne $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et ainsi de suite.

Réponse. $\sum \ln\cos\frac{x}{2^n} = \ln\frac{\sin x}{x}$; formule de Viète pour $\frac{2}{\pi}$.

Correction de l'exercice 7 – Sommes par intégrales

a) $\sum_{n=0}^{N}(x^{3n} - x^{3n+1}) = (1-x)\frac{1-x^{3N+3}}{1-x^3} = \frac{1-x^{3N+3}}{1+x+x^2}$. Le reste vérifie $0 \le \int_0^1 \frac{x^{3N+3}}{1+x+x^2}\,dx \le \frac{1}{3N+4} \to 0$, donc

$$\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

soit environ 0,6046.

b) $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} = 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Or $\ln 2 = 1 - \sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$ (série harmonique alternée groupée par deux, licite car le terme général tend vers 0). Donc la somme vaut $2(1-\ln 2) \approx 0{,}6137$.

Réponse. a) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; b) $2 - 2\ln 2$.

Correction de l'exercice 8 – Une récurrence additive

a) (u_n) croît ; si elle convergeait vers $\ell \ge 1$, on aurait $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$: absurde. Donc $u_n \to +\infty$, et $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2} \to 2$. Par Cesàro, $\frac{u_n^2}{n} \to 2$.

b) En sommant $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$ de 0 à $n-1$ ($u_0^2 = 1$) :

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$$

Comme $\frac{1}{u_k^2} \sim \frac{1}{2k}$, positif, série divergente : $\sum_{k<n}\frac{1}{u_k^2} \sim \frac{1}{2}\ln n$, d'où le développement.

c) $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$: $\sum\frac{1}{u_n}$ diverge. $\frac{1}{u_n^3} \sim \frac{1}{(2n)^{3/2}}$: convergence.

Réponse. $u_n^2 = 2n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$, $u_n \sim \sqrt{2n}$; $\sum\frac{1}{u_n}$ diverge, $\sum\frac{1}{u_n^3}$ converge.

Correction de l'exercice 9 – Sinus d'une racine presque entière

a) $\sqrt{n^2+1} = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

b) $\sin(n\pi + h) = (-1)^n \sin h$ et $\sin h = h + O(h^3)$ avec $h = \frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})$:

$$u_n = (-1)^n\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

c) $\sum u_n$ converge (série alternée $\sum(-1)^n\frac{\pi}{2n}$ + série absolument convergente). $|u_n| \sim \frac{\pi}{2n}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pas de convergence absolue. Enfin $u_n^2 \sim \frac{\pi^2}{4n^2}$: $\sum u_n^2$ converge.

Réponse. $u_n = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})$: semi-convergente ; $\sum u_n^2$ converge.

Correction de l'exercice 10 – Irrationalité de e

a) $q!\,\mathrm{e} = (q-1)!\,p$ est entier, et $\frac{q!}{k!}$ est entier pour $k \le q$.

b) $A = \sum_{k>q} \frac{q!}{k!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots > 0$, et

$$A < \sum_{j \ge 1} \frac{1}{(q+1)^j} = \frac{1/(q+1)}{1 - 1/(q+1)} = \frac{1}{q}$$

c) Un entier strictement compris entre 0 et $\frac{1}{q} \le 1$: contradiction. Donc $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$. Pour $\mathrm{e}^{-1} = \sum \frac{(-1)^k}{k!}$, même idée avec le critère spécial : $q!|\mathrm{e}^{-1} - S_q|$ serait un entier non nul $< \frac{1}{q+1}$ (d'ailleurs e^{-1} rationnel entraînerait e rationnel).

Réponse. A entier avec $0 < A < \frac{1}{q}$: impossible, donc e est irrationnel.

Correction de l'exercice 11 – Divergence de la série des inverses des nombres premiers

a) Chaque facteur vaut $\sum_{k \ge 0} p^{-k}$. Le produit (fini) de ces séries à termes positifs contient, pour chaque $n \le N$, le terme $\frac{1}{n}$: la décomposition $n = \prod p^{k_p}$ ne fait intervenir que des premiers $\le N$. D'où l'inégalité.

b) $\varphi(x) = x + x^2 + \ln(1-x)$ vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \ge 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) En passant au logarithme dans a), avec $H_N \ge \ln N$:

$$\ln\ln N \le \sum_{p \in P_N} -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \le \sum_{p \in P_N} \frac{1}{p} + \sum_p \frac{1}{p^2}$$

et $C = \sum_{n \ge 2} \frac{1}{n^2}$ majore la dernière somme. Comme $\ln\ln N \to +\infty$, la série $\sum \frac{1}{p}$ diverge (très lentement).

Réponse. $\sum_{p \le N} \frac{1}{p} \ge \ln\ln N - C$: la série des inverses des nombres premiers diverge.

Correction de l'exercice 12 – Reste d'une série exponentielle

a) Minoration par le premier terme. Majoration : $\frac{(n+1)!}{k!} \le \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}}$ pour $k \ge n+1$, donc $R_n \le \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j \ge 0} \frac{1}{(n+2)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$.

b) Les bornes sont équivalentes : $R_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$, terme d'une série convergente.

c) Famille positive, on peut sommer dans l'autre ordre : pour k fixé, il y a k valeurs de n ($0 \le n < k$), donc

$$\sum_{n \ge 0} R_n = \sum_{k \ge 1} \frac{k}{k!} = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{(k-1)!} = \mathrm{e}$$

Réponse. $R_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$; $\sum_{n \ge 0} R_n = \mathrm{e}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Somme alternée de restes

a) Voir la plaquette 3 : on somme $(-x)^{k-1}$ pour $k > n$ sous l’intégrale.

b) $r_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$, décroissante (car $x^{n+1} \le x^n$) et de limite nulle ($a_n \le \frac{1}{n+1}$) : critère spécial.

c) $\sum_{n=0}^{N} r_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{N+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$, et le terme en $(-x)^{N+1}$ a une intégrale majorée par $\frac{1}{N+2}$. Donc

$$\sum_{n\ge 0} r_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Réponse. $\sum_{n\ge 0} r_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 14 – Moyenne de Cesàro d’une série convergente

a) C’est le théorème de Cesàro appliqué à la suite convergente (S_k) : pour $\varepsilon > 0$, si $|S_k - S| \le \varepsilon$ pour $k \ge K$, alors

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k - S\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k<K} |S_k - S| + \varepsilon$$

et le premier terme tend vers 0.

b) $\sum_{k=0}^{n} S_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j\le k} u_j = \sum_{j=0}^{n} (n+1-j)u_j$: c’est la même quantité qu’en a).

c) Les sommes partielles valent $1, 0, 1, 0, \ldots$; leur moyenne tend vers $\frac{1}{2}$. La moyenne de Cesàro prolonge la notion de somme, et coïncide avec elle pour une série convergente.

Réponse. Moyennes de Cesàro des $S_n \to S$; pour $\sum (-1)^n$, la limite vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : la somme des inverses des carrés

a) Par Moivre et le binôme, $\sin((2m+1)\theta) = \sum_j (-1)^j \binom{2m+1}{2j+1} \cos^{2m-2j}\theta \sin^{2j+1}\theta$; on factorise $\sin^{2m+1}\theta$.

b) $\sin((2m+1)\theta_k) = \sin(k\pi) = 0$ et $\sin\theta_k \neq 0$, donc $P(\cot^2\theta_k) = 0$. Les $\theta_k \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sont distincts et $\cot^2$ y est injective : ce sont m racines distinctes de P, de degré m, donc toutes. Relation coefficients-racines :

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2\theta_k = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{6(2m+1)} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

c) En passant aux inverses et au carré : $\frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$.

d) Avec $x = \theta_k$ et en sommant : $\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3}$. Après multiplication par $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$, les deux bornes tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$: c’est la limite des sommes partielles.

Réponse. $\sum \cot^2\theta_k = \frac{m(2m-1)}{3}$, d’où $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ par encadrement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).