Plaquette 1 – Critères de convergence, comparaison et séries alternées

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Généralités. $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ converge.

— **Condition nécessaire** : $u_n \to 0$. Si $u_n \not\to 0$, la série **diverge grossièrement**.

— **Convergence absolue** : si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge. La réciproque est fausse (**semi-convergence**).

Séries de référence.

— **Géométrique** : $\sum q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$, et vaut alors $\dfrac{1}{1-q}$.

— **Riemann** : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

— **Bertrand** : $\sum \dfrac{1}{n \ln^\beta n}$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$.

— **Exponentielle** : $\sum \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ pour tout x.

Critères pour les séries à termes positifs.

— **Comparaison** : $0 \leq u_n \leq v_n$; si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi.

— **Équivalents** : si $u_n \sim v_n$ (termes **positifs**), les deux séries sont de **même nature**.

— **D'Alembert** : si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$, la série converge si $\ell < 1$, diverge si $\ell > 1$ (cas $\ell = 1$ **indécis**).

— **Cauchy** : même conclusion avec $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

— **Comparaison série-intégrale** : pour f positive **décroissante**, $\sum f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f$ ont même nature.

Séries alternées (critère spécial). Si (a_n) est **positive, décroissante et tend vers** 0, alors $\sum (-1)^n a_n$ **converge**, et

$$|R_N| = \left| \sum_{n>N} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1}$$

le reste ayant de plus le **signe de son premier terme**.

Correction de l'exercice 1 – Divergence grossière

— **Première série** : $u_n = \dfrac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$. La série **diverge grossièrement**.

— **Seconde série** : $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \to \cos 0 = 1 \neq 0$. Même conclusion : **divergence grossière**.

— **Réflexe indispensable** : toujours calculer $\lim u_n$ **avant** tout autre critère. Si la limite n'est pas nulle, l'étude s'arrête là.

— **Attention** : la réciproque est fausse — $u_n \to 0$ **n'implique pas** la convergence, comme le montre la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$, divergente.

Réponse. Les deux divergent grossièrement ($u_n \to 1 \neq 0$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Comparaison par équivalents

Les termes sont **positifs** : on peut utiliser les équivalents.

— $u_n = \dfrac{n+1}{n^3+2n} \sim \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$.

— $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de **Riemann** avec $\alpha = 2 > 1$: elle **converge**.

— Par comparaison par équivalents (termes positifs), $\sum u_n$ **converge**.

— **Contrôle** : $u_1 = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667$, $u_{10} = \dfrac{11}{1020} \approx 0{,}0108$, à comparer à $\dfrac{1}{100} = 0{,}01$ — le comportement en $\dfrac{1}{n^2}$ est bien visible ✓

— **Méthode** : garder les termes **dominants** du numérateur et du dénominateur, et identifier la série de Riemann correspondante.

Réponse. Converge ($u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, Riemann $\alpha = 2$).

Correction de l'exercice 3 – Règle de d'Alembert

Première série. Les termes sont positifs ; on calcule le rapport.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

— Cette quantité tend vers $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368 < 1$: la série **converge** (d'Alembert).

Seconde série. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} \to 0 < 1$.

— La série **converge** ; sa somme vaut d'ailleurs e^2 (série exponentielle, en partant de $n = 0$).

— **Quand employer d'Alembert** : dès qu'apparaissent des **factorielles** ou des **puissances n-ièmes** ; c'est inefficace sur les fractions rationnelles (le rapport tend alors vers 1).

Réponse. Les deux convergent ($\mathrm{e}^{-1} < 1$ et $0 < 1$).

Correction de l'exercice 4 – Règle de Cauchy

Les termes sont positifs et se présentent sous forme de **puissance n-ième** : la règle de **Cauchy** s'impose.

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{3n+1}{4n+2} \longrightarrow \frac{3}{4}$$

— Comme $\dfrac{3}{4} < 1$, la série **converge**.

— **Comparaison géométrique** : pour n assez grand, $u_n \leq (0{,}8)^n$, terme général d'une géométrique convergente ✓

— **Contrôle numérique** : $u_{10} = \left(\dfrac{31}{42}\right)^{10} \approx 0{,}0480$; $u_{20} \approx 0{,}00269$ — décroissance clairement géométrique.

— **Cauchy contre d'Alembert** : Cauchy est plus **général** (il s'applique dès que la racine n-ième a une limite), et particulièrement adapté aux expressions élevées à la puissance n.

Réponse. Converge : $\sqrt[n]{u_n} \to \dfrac{3}{4} < 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Comparaison série-intégrale

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ est **positive et décroissante** sur $[2\,;+\infty[$.

— **Comparaison série-intégrale** : $\sum f(n)$ et $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ont **même nature**.

— **Primitive** : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln x)$ (forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln x$).

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

— L'intégrale **diverge**, donc la série aussi.

— **Divergence très lente** : pour atteindre une somme de 5, il faut n de l'ordre de $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^5} \approx 10^{64}$ — la divergence est indétectable numériquement.

— **Séries de Bertrand** : $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\beta > 1$; ici $\beta = 1$, cas limite divergent.

Réponse. Diverge (comparaison avec $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln\ln x$).

Correction de l'exercice 6 – Série alternée

On applique le **critère spécial des séries alternées** avec $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

— $a_n > 0$ ✓ ; (a_n) est **décroissante** ✓ ; $a_n \to 0$ ✓

— La série **converge**.

— **Majoration du reste** : $|R_N| \le a_{N+1}$, donc

$$|R_{100}| \le \frac{1}{\sqrt{101}} \approx 0{,}0995$$

— **Semi-convergence** : $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ (série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \le 1$) **diverge**, donc la série n'est **pas absolument convergente**.

— **Conséquence** (théorème de Riemann) : en réordonnant les termes d'une série semi-convergente, on peut obtenir **n'importe quelle** somme — la commutativité est perdue.

Réponse. Converge (critère spécial) ; $|R_{100}| \le \dfrac{1}{\sqrt{101}} \approx 0{,}0995$.

Correction de l'exercice 7 – Convergence absolue

Le signe de $\sin n$ est irrégulier : on passe par la **convergence absolue**.

— **Majoration** : $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$.

— $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

— Par comparaison, $\displaystyle\sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ converge : la série est **absolument convergente**, donc **convergente**.

— **Méthode générale** : face à un facteur borné de signe imprévisible (sin, cos, $(-1)^n$ mêlé à autre chose), majorer en valeur absolue est le premier réflexe.

— **Cas plus délicat** : $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n}$ converge aussi, mais **pas absolument** — il faut alors une transformation d'Abel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Converge absolument (majoration par $\frac{1}{n^2}$).

Correction de l'exercice 8 – Calcul d'une somme télescopique

— **Décomposition** : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

— **Somme partielle** (télescopage) :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

— Quand $N \to +\infty$: $S_N \to 1$.

— **Conclusion** : la série converge et sa somme vaut 1.

— **Contrôle** : $S_1 = 0{,}5$, $S_2 = 0{,}667$, $S_{10} = 0{,}909$, $S_{100} = 0{,}990$ — convergence vers 1 ✓

— **Méthode** : après décomposition en éléments simples, chercher systématiquement un **télescopage** ; c'est l'un des rares cas où l'on obtient la somme **exacte**.

Réponse. La somme vaut 1.

Correction de l'exercice 9 – Série géométrique dérivée

On part de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$, que l'on **dérive** terme à terme (licite à l'intérieur du disque de convergence).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

— Avec $x = \frac{1}{2}$: $\frac{1/2}{(1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$.

— **Somme** : $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} = 2$.

— **Contrôle numérique** : $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}375 + 0{,}25 + 0{,}15625 \approx 1{,}781$ après 5 termes, puis 1,961 après 8 — convergence vers 2 ✓

— **Interprétation probabiliste** : c'est l'espérance d'une loi **géométrique** de paramètre $\frac{1}{2}$ (nombre moyen de lancers d'une pièce avant le premier pile).

Réponse. La somme vaut 2.

Correction de l'exercice 10 – Reste d'une série convergente

On utilise la **comparaison série-intégrale** avec $f(x) = \frac{1}{x^2}$, décroissante.

— Pour $n \geq N+1$: $\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

— En sommant pour $n > N$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq R_N \leq \int_{N}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

— Soit $\frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$.

— **Équivalent** : $R_N \sim \frac{1}{N}$.

— **Application numérique** : $R_{100} \in [0{,}00990\,;\,0{,}01]$. Avec $S = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934$ et $S_{100} \approx 1{,}634984$, on a $R_{100} \approx 0{,}00995$ ✓ — l'encadrement est très serré.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Usage** : ce type d'encadrement pilote le nombre de termes nécessaires pour un calcul approché à précision donnée.

Réponse. $\frac{1}{N+1} \le R_N \le \frac{1}{N}$, donc $R_N \sim \frac{1}{N}$.

Correction de l'exercice 11 – Produit de Cauchy

Le **produit de Cauchy** de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est $\sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

— Ici $a_k = \frac{x^k}{k!}$ et $b_{n-k} = \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$, donc

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k!(n-k)!} = \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{(2x)^n}{n!}$$

— en utilisant $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.

— **Interprétation** : on retrouve $e^x \times e^x = e^{2x}$ ✓

— **Validité** : les deux séries sont **absolument convergentes**, ce qui garantit que le produit de Cauchy converge vers le produit des sommes.

— **Contre-exemple si l'absolue convergence manque** : le carré de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (semi-convergente) **diverge**.

Réponse. $c_n = \frac{(2x)^n}{n!}$, soit $e^x e^x = e^{2x}$.

Correction de l'exercice 12 – Comparaison logarithmique : coefficients binomiaux centraux

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2}$, donc

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le rapport tend vers 1 : d'Alembert ne conclut pas.

b) Soit $v_n = \ln u_n + \frac{1}{2}\ln n$. Alors

$v_{n+1} - v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série absolument convergente. Donc (v_n) converge vers un réel ℓ, et $\sqrt{n}\, u_n = e^{v_n} \to K = e^{\ell} > 0$.

c) $u_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$: $\sum u_n$ diverge (Riemann, $\alpha = \frac{1}{2}$) ; $\frac{u_n}{n} \sim \frac{K}{n^{3/2}}$: $\sum \frac{u_n}{n}$ converge. (On montre avec Wallis que $K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, car $u_n = \binom{2n}{n} 4^{-n}$.)

Réponse. $u_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$ ($K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$) : $\sum u_n$ diverge, $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

Correction de l'exercice 13 – Transformation d'Abel

a) $S_n = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ et, la raison $e^{i\theta}$ étant différente de 1,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} \right| = \left| \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right| \le \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} = \frac{2}{2|\sin(\theta/2)|}$$

b) Avec $S_0 = 0$: $\sum_{k=1}^{N} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{S_k}{k+1}$, et en regroupant les termes de même indice S_k ($1 \le k \le N-1$), on obtient la formule.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\frac{S_N}{N} \to 0$ (S_N bornée), et $\left|S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \leq \frac{M}{k(k+1)}$, terme d'une série convergente : la série de droite converge absolument. Donc les sommes partielles de $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ convergent. Pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, tous les termes sont nuls.

Réponse. Sommes partielles S_n bornées + $\frac{1}{n}$ décroissant vers 0 : $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge (Abel).

Correction de l'exercice 14 – Série alternée non monotone

a) $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ n'est pas décroissante : $|u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \approx 0{,}414$ mais $|u_3| = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \approx 1{,}366$. Le critère ne s'applique pas.

b) On factorise : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$, et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

c) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère spécial), $\sum O(n^{-3/2})$ converge absolument, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge : la somme diverge. Les équivalents ne conservent la nature que pour des séries de **signe constant**.

Réponse. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O(n^{-3/2})$: divergence, malgré $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : nature selon un paramètre

Les termes sont **positifs** pour $n \geq 2$.

Cas $\alpha > 1$. On choisit β avec $1 < \beta < \alpha$.

— **Croissances comparées** : $\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \times \frac{1}{n^\beta}$, et $\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \to 0$.

— Donc $\frac{\ln n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\beta}$ à partir d'un certain rang, et $\sum \frac{1}{n^\beta}$ **converge** ($\beta > 1$).

— La série **converge**.

Cas $\alpha \leq 1$. Pour $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$, donc

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$$

— La série harmonique **diverge**, donc par comparaison la série **diverge**.

Conclusion : convergence **si et seulement si** $\alpha > 1$.

— **Vérification du cas limite** $\alpha = 1$: $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge, et même plus vite que la série harmonique ✓

— **Principe général** : un facteur logarithmique ne change **pas** la nature d'une série de Riemann, sauf exactement au **cas critique** $\alpha = 1$ (séries de Bertrand).

Réponse. Converge si et seulement si $\alpha > 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).