Plaquette 3 – Sommes partielles et restes : équivalents et développements asymptotiques

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Série-intégrale. Pour f continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$:

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \le f(1) + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Sommation des équivalents ($u_n \sim v_n$, $v_n \ge 0$).

— Si $\sum v_n$ diverge : $\sum_{k\le n} u_k \sim \sum_{k\le n} v_k$.

— Si $\sum v_n$ converge : $\sum_{k>n} u_k \sim \sum_{k>n} v_k$.

— Même principe avec o et O.

Références. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$; $\sum_{k>n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ pour $\alpha > 1$.

Correction de l'exercice 1 – La constante d'Euler et le terme suivant

a) $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$: la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge absolument, et (u_n) converge (lien suite-série).

b) $u_n - \gamma = \sum_{k\ge n}(u_k - u_{k+1})$, reste d'une série à termes positifs équivalents à $\frac{1}{2k^2}$. Par sommation des équivalents (série convergente) :

$$u_n - \gamma \sim \sum_{k\ge n} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$$

(le reste $\sum_{k\ge n}\frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ par comparaison série-intégrale).

c) C'est la traduction de b). Numériquement,
$H_{1000} \approx \ln 1000 + 0{,}5772 + 0{,}0005 \approx 6{,}9078 + 0{,}5777 = 7{,}4855$ (valeur exacte 7,48547…).

Réponse. $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; $H_{1000} \approx 7{,}4855$.

Correction de l'exercice 2 – Somme des inverses des racines

a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante : $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \le \frac{1}{\sqrt{k}} \le \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ ($k \ge 2$ pour la majoration). En sommant :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \le S_n \le 1 + 2\sqrt{n} - 2$$

Les deux bornes sont équivalentes à $2\sqrt{n}$.

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$, d'ordre $-\frac{1}{4n^{3/2}}$: série convergente, donc (a_n) converge.

c) Par l'encadrement, $S_n \ge 100$ dès que $2\sqrt{n+1} - 2 \ge 100$, soit $n \ge 2600$; et $S_n < 100$ tant que $2\sqrt{n} - 1 < 100$, soit $n \le 2550$. Le seuil est entre 2551 et 2600 (il vaut 2 574, la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

constante limite de a_n étant $\approx -1{,}46$).

Réponse. $S_n \sim 2\sqrt{n}$, $S_n - 2\sqrt{n}$ converge ; $S_n > 100$ pour $n \geq 2\,574$.

Correction de l'exercice 3 – Somme des logarithmes

a) ln croît : $\int_{k-1}^{k} \ln t \,\mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \,\mathrm{d}t$. En sommant ($k = 2$ à n à gauche, $k = 1$ à n à droite, $\ln 1 = 0$), on obtient l'encadrement.

b) Avec la primitive $t \ln t - t$:

$$n \ln n - n + 1 \leq L_n \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$

Or $(n+1)\ln(n+1) = (n+1)\ln n + (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\ln n + \ln n + O(1)$. Les deux bornes valent $n\ln n - n + O(\ln n)$, et $n \ln n$ domine.

c) Stirling donne $L_n = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1)$: la comparaison série-intégrale fournit les deux premiers termes, le $O(\ln n)$ cache le $\frac{1}{2}\ln n$.

Réponse. $\ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n) \sim n \ln n$; Stirling précise le terme $\frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi}$.

Correction de l'exercice 4 – Restes des séries de Riemann

a) Pour $k > n$: $\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. En sommant pour $k \geq n+1$:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

ce qui est l'encadrement annoncé ; les bornes sont équivalentes, donc $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

b) Pour $\alpha = 3$, $R_n \leq \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-6}$ dès que $n^2 \geq 5 \times 10^5$, soit $n \geq 708$. La minoration $R_n \geq \frac{1}{2(n+1)^2}$ montre qu'il faut au moins $n \geq 707$: il faut environ 707 termes.

c) $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, positif : $\sum R_n$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$.

Réponse. $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$; environ 707 termes pour $\zeta(3)$ à 10^{-6} ; $\sum R_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

Correction de l'exercice 5 – Sommation des équivalents

a) $\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k} > 0$ et $\sum \frac{1}{k}$ diverge : par sommation des équivalents,

$$A_n \sim H_n \sim \ln n$$

b) $\frac{1}{k + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$, positif, série divergente : $B_n \sim \ln n$.

c) $\frac{1}{k^2 + k} \sim \frac{1}{k^2}$, série convergente : $C_n \sim \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$. Valeur exacte par télescopage : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc $C_n = \frac{1}{n}$ exactement — cohérent.

Réponse. $A_n \sim \ln n$, $B_n \sim \ln n$, $C_n = \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 6 – Sommes de puissances

a) Si $\alpha \geq 0$, $t \mapsto t^\alpha$ croît : $\int_{0}^{n} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leq P_n \leq \int_{1}^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$, soit

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq P_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Si $-1 < \alpha < 0$, elle décroît et les inégalités s'inversent : $\frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \le P_n \le 1 + \frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. Dans les deux cas, les bornes sont équivalentes à $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

b) $\sum k = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$ et $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}$.

c) Pour $\alpha = -1$: $P_n = H_n \sim \ln n$ (la formule dégénère). Pour $\alpha < -1$: P_n converge vers $\zeta(-\alpha)$.

Réponse. $\sum_{k \le n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour $\alpha > -1$; $\ln n$ pour $\alpha = -1$; limite finie sinon.

Correction de l'exercice 7 – La constante de Stirling par les intégrales de Wallis

a) $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ vérifie $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = u_n$, et $u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Par décroissance, $W_{n+2} \le W_{n+1} \le W_n$, donc $\frac{n+1}{n+2} \le \frac{W_{n+1}}{W_n} \le 1$: $W_{n+1} \sim W_n$, d'où $(n+1)W_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

b) Par récurrence avec $W_0 = \frac{\pi}{2}$: $W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

c) Avec l'équivalent de $n!$:

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \sim \frac{C\sqrt{2n}\,(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{4^n C^2 n\, n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}$$

donc $W_{2n} \sim \frac{\pi\sqrt{2}}{2C\sqrt{n}}$. Or $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. En identifiant : $C = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{2\pi}$.

Réponse. $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et $W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2}$ donnent $C = \sqrt{2\pi}$: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$.

Correction de l'exercice 8 – Le sinus itéré

a) Avec $x = u_n \to 0$: $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^6)$, donc

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\frac{x^4}{3} + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

b) Par Cesàro, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \to \frac{1}{3}$, donc $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ et $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

c) Termes positifs : $u_n \sim \sqrt{3}\, n^{-1/2}$ diverge, $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ diverge, $u_n^3 \sim 3\sqrt{3}\, n^{-3/2}$ converge.

Réponse. $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$; $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ divergent, $\sum u_n^3$ converge.

Correction de l'exercice 9 – Développement des sommes partielles de la série des inverses des carrés

a) $\frac{1}{k-\frac12} - \frac{1}{k+\frac12} = \frac{1}{k^2-\frac14} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4k^2}} = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{1}{4k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)$.

b) Donc $\frac{1}{k^2} = \left(\frac{1}{k-\frac12} - \frac{1}{k+\frac12}\right) + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$. En sommant pour $k > n$ (télescopage, et reste d'une série en $O(k^{-4})$, qui est $O(n^{-3})$) :

$$R_n = \frac{1}{n+\frac12} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Pour $n = 10$: $1{,}64493 - 0{,}1 + 0{,}005 = 1{,}54993$, à comparer à $S_{10} = 1{,}54977\ldots$ (écart $\approx 1{,}6 \times 10^{-4}$, de l'ordre de $\frac{1}{6n^3}$).

Réponse. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$; $S_{10} \approx 1{,}5498$.

Correction de l'exercice 10 – Sommes d'une fonction croissante rapide

a) Avec $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ et une intégration par parties :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{x}} 2u\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + 2$$

b) $f(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ croît : $\int_{k-1}^{k} f \le f(k) \le \int_{k}^{k+1} f$, d'où $\int_0^n f \le E_n \le \int_1^{n+1} f$. Or $2(\sqrt{n+1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}} \sim 2\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ car $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$. Les deux bornes sont équivalentes à $2\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.

c) Oui : $\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}{E_n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$. En revanche, $\sum_{k \le n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \sim 2 \cdot 2^n$: le dernier terme représente la moitié de la somme, la croissance est trop rapide pour que l'intégrale donne un équivalent ($\frac{f(n+1)}{f(n)} \not\to 1$).

Réponse. $\sum_{k \le n} \mathrm{e}^{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$; méthode valable car $\frac{f(n+1)}{f(n)} \to 1$, contrairement à 2^n.

Correction de l'exercice 11 – Un produit et son équivalent

a) $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$, et le reste $\delta_k = O(k^{-3/2})$ est le terme d'une série absolument convergente : $c_n = \sum_{k \le n} \delta_k$ converge.

b) $\sum_{k \le n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + a + o(1)$ et $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, donc

$$\ln P_n = 2\sqrt{n} - \frac{1}{2}\ln n + \left(a - \frac{\gamma}{2} + c\right) + o(1)$$

d'où $P_n \sim K\,\mathrm{e}^{2\sqrt{n}} n^{-1/2}$ avec $K = \mathrm{e}^{a - \gamma/2 + c}$.

c) Oui : $\frac{1}{P_n} \sim \frac{\sqrt{n}}{K}\mathrm{e}^{-2\sqrt{n}}$, et $n^2 \cdot \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{n}} \to 0$, donc $\frac{1}{P_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Réponse. $P_n \sim K\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; $\sum \frac{1}{P_n}$ converge.

Correction de l'exercice 12 – Somme pondérée par des logarithmes

a) Par parties :

$$\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$$

b) $t \mapsto t\ln t$ croît sur $[1, +\infty[$: $\int_1^n t\ln t\,\mathrm{d}t \le T_n \le \int_1^{n+1} t\ln t\,\mathrm{d}t$. La borne de droite moins celle de gauche vaut $\int_n^{n+1} t\ln t\,\mathrm{d}t \le (n+1)\ln(n+1) = O(n\ln n)$. Donc $T_n = \frac{n^2\ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + O(n\ln n)$.

c) $\ln \prod k^k = T_n$, et le terme $\frac{n^2\ln n}{2}$ domine les autres.

Réponse. $\sum_{k \le n} k\ln k = \frac{n^2\ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + O(n\ln n)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Inverses des impairs et série harmonique alternée

a) H_{2n} = (inverses des impairs) + (inverses des pairs) = $I_n + \frac{1}{2}H_n$, donc

$$I_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \ln(2n) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1) = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

b) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = I_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n = \ln 2 + o(1)$. Les sommes partielles d'indice impair diffèrent des paires d'un terme tendant vers 0 : la série converge vers $\ln 2$.

c) Après n blocs : $I_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{1}{2}\ln(2n) + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\ln n - \frac{\gamma}{2} + o(1) = \frac{3}{2}\ln 2 + o(1)$. La série réordonnée a pour somme $\frac{3}{2}\ln 2$: réordonner une série semi-convergente change sa somme.

Réponse. $I_n = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)$; $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$; réordonnée : $\frac{3}{2}\ln 2$.

Correction de l'exercice 14 – Reste de la série harmonique alternée

a) $\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 (-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x$, et par la somme géométrique

$$\sum_{k=n+1}^{N} (-x)^{k-1} = \frac{(-x)^n - (-x)^N}{1+x}$$

b) $\left|\int_0^1 \frac{(-x)^N}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 x^N\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N+1} \to 0$: on fait $N \to +\infty$.

c) $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \sim \frac{1}{2n}$, donc $r_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$. Le critère spécial donne seulement $|r_n| \le \frac{1}{n+1}$: la vraie taille du reste est la moitié, et son signe est celui de $(-1)^n$, c'est-à-dire celui du premier terme négligé $\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$.

Réponse. $r_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \sim \frac{(-1)^n}{2n}$, moitié de la majoration $\frac{1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : inverses de logarithmes et de nombres harmoniques

a) Avec $u = \frac{1}{\ln t}$, $v' = 1$: $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t}$. Puis

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} \le \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{x}{\ln^2 \sqrt{x}} = O(\sqrt{x}) + \frac{4x}{\ln^2 x} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

donc $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}$.

b) $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ décroît : $\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} \le \frac{1}{\ln 2} + \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, et les deux bornes sont équivalentes à $\frac{n}{\ln n}$.

c) $\frac{1}{H_k} \sim \frac{1}{\ln k}$, termes positifs, série divergente : par sommation des équivalents, $\sum_{k \le n} \frac{1}{H_k} \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$ (le terme $k=1$ ne compte pas).

d) $\frac{1}{kH_k} \sim \frac{1}{k\ln k}$, série divergente ; par série-intégrale, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \sim \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln\ln n - \ln\ln 2 \sim \ln\ln n$.

Réponse. $\sum \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$, $\sum \frac{1}{H_k} \sim \frac{n}{\ln n}$, $\sum \frac{1}{kH_k} \sim \ln\ln n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).