Plaquette 2 – Séries à termes positifs : comparaisons et développements asymptotiques

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développements usuels en 0.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4), \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

— $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$; $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + O(x^3)$.

Références. Riemann : $\sum n^{-\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Lien suite-série. (a_n) converge $\Leftrightarrow \sum (a_{n+1} - a_n)$ converge.

Attention. Les équivalents ne conservent la nature que pour des termes de **signe constant**.

Correction de l’exercice 1 – Trois natures par développement limité

a) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc

$$a_n = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

a_n est de signe constant (négatif) et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge : $\sum a_n$ **converge**.

b) $b_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} - 1$ avec $\frac{\ln n}{n} \to 0$, donc $b_n \sim \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$: $\sum b_n$ **diverge** (comparaison à la série harmonique, termes positifs).

c) $c_n \sim \frac{1}{2n^2}$, positif : $\sum c_n$ **converge**.

Réponse. $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$: converge ; $b_n \sim \frac{\ln n}{n}$: diverge ; $c_n \sim \frac{1}{2n^2}$: converge.

Correction de l’exercice 2 – Autour de la limite de (1 + 1/n) puissance n

a) $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n} + O(n^{-2})} = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

b) Le terme général est équivalent à $\frac{\mathrm{e}}{2n} > 0$: la série **diverge**.

c) $\ln v_n = n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $v_n \to \mathrm{e}^{-1/2} \neq 0$: la série **diverge grossièrement**.

Réponse. $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n \sim \frac{\mathrm{e}}{2n}$: diverge ; $v_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$: divergence grossière.

Correction de l’exercice 3 – Nature selon un paramètre par développement

a) $\sin x \leq x$ pour $x \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Avec $x = n^{-\alpha} \to 0$: $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + O(x^5)$, donc

$$u_n \sim \frac{1}{6n^{3\alpha}}$$

Termes positifs : $\sum u_n$ converge si et seulement si $3\alpha > 1$, soit $\alpha > \frac{1}{3}$.

c) $w_n = n\left(\left(1 + n^{\alpha-3}\right)^{1/3} - 1\right)$ avec $n^{\alpha-3} \to 0$: $w_n \sim n \cdot \frac{n^{\alpha-3}}{3} = \frac{n^{\alpha-2}}{3} > 0$. La série converge si et seulement si $2 - \alpha > 1$, soit $\alpha < 1$.

Réponse. $u_n \sim \frac{1}{6n^{3\alpha}}$: converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}$; $w_n \sim \frac{n^{\alpha-2}}{3}$: converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

Correction de l'exercice 4 – Séries de Bertrand

a) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ pour a assez grand (sa dérivée est du signe de $-(\ln x + \beta)$). Pour $\beta \neq 1$:

$$\int_a^A \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta} = \left[\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_a^A$$

qui a une limite finie si et seulement si $\beta > 1$; pour $\beta = 1$, la primitive $\ln\ln x$ tend vers $+\infty$. La série et l'intégrale ayant même nature, convergence $\Leftrightarrow \beta > 1$.

b) $n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \to 0$ (croissances comparées, $\gamma - \alpha < 0$), donc $u_n \leq n^{-\gamma}$ à partir d'un rang, et $\sum n^{-\gamma}$ converge.

c) Avec $\alpha < \gamma < 1$: $n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \to +\infty$, donc $u_n \geq n^{-\gamma}$ à partir d'un rang, et $\sum n^{-\gamma}$ diverge.

Réponse. Converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Correction de l'exercice 5 – Factorielles et coefficients binomiaux

Les termes sont positifs.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum a_n$ **converge** (d'Alembert).

Pour b_n, le rapport vaut $4 \times \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1}$, qui tend vers 1 : d'Alembert ne conclut pas. Mais ce rapport est **strictement supérieur à** 1 : la suite (b_n) est croissante, avec $b_0 = 1$, donc $b_n \geq 1$ ne tend pas vers 0 : $\sum b_n$ **diverge grossièrement**. (On a même $b_n \sim \sqrt{\pi n}$, par l'exercice sur les coefficients binomiaux centraux.)

Réponse. $\sum a_n$ converge (rapport $\to \frac{1}{4}$) ; (b_n) croissante ≥ 1 : divergence grossière.

Correction de l'exercice 6 – Puissances n carré

a) $\sqrt[n]{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} < 1$: convergence (Cauchy).

b) $v_n = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$: divergence grossière.

c) $\ln w_n = n^2 \ln\left(1 - n^{-3/2}\right) = n^2\left(-n^{-3/2} + O(n^{-3})\right) = -\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $w_n \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ et

$$n^2 w_n \sim n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

(croissances comparées avec $t = \sqrt{n}$: $t^4 \mathrm{e}^{-t} \to 0$). Ainsi $w_n \leq \frac{1}{n^2}$ à partir d'un rang :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

convergence. Ici Cauchy échoue ($\sqrt[n]{w_n} \to 1$), il faut l'échelle plus fine $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

Réponse. u_n : converge (Cauchy) ; $v_n \to \mathrm{e}^{-1}$: diverge ; $w_n \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$: converge.

Correction de l'exercice 7 – Une suite récurrente et la série de ses carrés

a) $x \mapsto x - x^2$ envoie $]0,1[$ dans $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, et $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$. Décroissante minorée, (u_n) converge vers ℓ avec $\ell = \ell - \ell^2$, soit $\ell = 0$.

b) Télescopage : $\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \to u_0$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$$

c) $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2(1-u_n)} = \frac{1}{1-u_n} \to 1$. Par le théorème de Cesàro, $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) \to 1$, donc $\frac{1}{u_n} \sim n$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$: $\sum u_n$ **diverge**.

Réponse. $\sum u_n^2 = u_0$ (télescopage) ; $u_n \sim \frac{1}{n}$: $\sum u_n$ diverge.

Correction de l'exercice 8 – Terme général défini par une intégrale

a) Sur $[0,1]$, $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x} \le 1$, donc $\frac{1}{2}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \le u_n \le \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$, d'où l'encadrement. Par minoration (termes positifs) par $\frac{1}{2(n+1)}$, $\sum u_n$ **diverge**.

b) $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Comme (u_n) est décroissante ($x^{n+1} \le x^n$) :

$$\frac{1}{n+2} = u_{n+1} + u_{n+2} \le 2u_{n+1} \le u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

d'où $u_{n+1} \sim \frac{1}{2n}$, puis $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

c) $u_n^2 \sim \frac{1}{4n^2}$: convergence ; $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$: convergence.

Réponse. $u_n \sim \frac{1}{2n}$: $\sum u_n$ diverge ; $\sum u_n^2$ et $\sum \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ convergent.

Correction de l'exercice 9 – Divergence de la série des rapports aux sommes partielles

a) Pour $n < k \le m$, $S_k \le S_m$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{S_m} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \frac{S_m - S_n}{S_m} = 1 - \frac{S_n}{S_m}$$

Comme $S_m \to +\infty$, pour m assez grand le membre de droite dépasse $\frac{1}{2}$: les sommes partielles de $\sum \frac{a_k}{S_k}$ ne sont pas de Cauchy, la série diverge.

b) $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}S_n} = \frac{a_n}{S_{n-1}S_n} \ge \frac{a_n}{S_n^2}$. La série télescopique $\sum\left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ converge (vers $\frac{1}{S_1}$, car $\frac{1}{S_n} \to 0$) : par comparaison, $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ converge.

c) $S_n = n$: on retrouve la divergence de $\sum \frac{1}{n}$ et la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$.

Réponse. $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge (critère de Cauchy), $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ converge (télescopage).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Condensation de Cauchy

a) Le bloc contient 2^k termes, tous compris entre $u_{2^{k+1}}$ et u_{2^k} par décroissance.

b) En sommant pour $0 \le k \le K$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K} 2^{k+1}u_{2^{k+1}} \le \sum_{n=1}^{2^{K+1}-1} u_n \le \sum_{k=0}^{K} 2^k u_{2^k}$$

Si $\sum 2^k u_{2^k}$ converge, les sommes partielles de $\sum u_n$ (croissantes) sont majorées : convergence. Si elle diverge, la minoration donne la divergence de $\sum u_n$.

c) Pour $u_n = n^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) : $2^k u_{2^k} = \left(2^{1-\alpha}\right)^k$, série géométrique convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Pour $u_n = \frac{1}{n\ln n}$ ($n \ge 2$) : $2^k u_{2^k} = \frac{1}{k\ln 2}$, série divergente.

Réponse. $\sum u_n$ et $\sum 2^k u_{2^k}$ de même nature ; Riemann : géométrique de raison $2^{1-\alpha}$; $\frac{1}{n\ln n}$: diverge.

Correction de l'exercice 11 – Lien suite-série et formule de Stirling

a) Comme $\ln((n+1)!) = \ln(n!) + \ln(n+1)$:

$$a_{n+1} - a_n = \ln(n+1) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + 1 = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}$$

b) Avec $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = 1 + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{12n^2}$: la série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge absolument, et (a_n) converge vers un réel ℓ.

c) $\exp(a_n) = \frac{n!\,e^n}{n^{n+1/2}} \to C = e^{\ell} > 0$, ce qui est l'équivalent annoncé. (Les intégrales de Wallis donnent $C = \sqrt{2\pi}$.)

Réponse. $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{12n^2}$: (a_n) converge, d'où $n! \sim C\sqrt{n}(n/e)^n$ (avec $C = \sqrt{2\pi}$).

Correction de l'exercice 12 – Séries de racines et de carrés

a) $u_n \to 0$, donc $u_n \le 1$ à partir d'un rang, et $u_n^2 \le u_n$: convergence. Réciproque fausse : $u_n = \frac{1}{n}$.

b) Avec $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \frac{1}{n}$:

$$\frac{\sqrt{u_n}}{n} \le \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

terme général d'une série convergente.

c) Oui : $\sqrt{u_n u_{n+1}} \le \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$, et $\sum \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ converge.

Réponse. $\sum u_n^2$, $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$, $\sum\sqrt{u_n u_{n+1}}$ convergent (majorations élémentaires).

Correction de l'exercice 13 – Terme général décroissant d'une série convergente

a) Par décroissance, $u_{n+1} + \ldots + u_{2n} \ge n u_{2n}$, donc $n u_{2n} \le R_n \to 0$. Alors $2n u_{2n} \to 0$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(2n+1)u_{2n+1} \le \frac{2n+1}{2n} \cdot 2nu_{2n} \to 0$: $nu_n \to 0$.

b) Soit $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré parfait, $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon : $\sum u_n \le \sum \frac{1}{k^2} + \sum \frac{1}{n^2}$ converge, mais pour $n = k^2$,

$$nu_n = \text{Y} \longrightarrow 0$$

c) Pour $u_n = \frac{\ln n}{n}$, décroissante à partir de $n = 3$: $nu_n = \ln \text{Y} \to 0$, donc la série diverge (par contraposée de a)). Pour $u_n = \frac{1}{n \ln n}$: $nu_n = \frac{1}{\ln n} \to 0$, la condition nécessaire est satisfaite et ne permet pas de conclure ; il faut la condensation ou la comparaison à une intégrale.

Réponse. Décroissance + convergence $\Rightarrow nu_n \to 0$; faux sans décroissance ; $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge, mais rien sur $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

Correction de l'exercice 14 – Différences de racines

a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, donc le terme est équivalent à $\frac{1}{2^\alpha n^{\alpha/2}}$: convergence si et seulement si $\alpha > 2$.

b) $\sqrt{n^2+n} = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} = n\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$, donc

$$\sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

terme de signe constant équivalent à $-\frac{1}{8n}$: divergence.

c) Le terme général doit tendre vers 0 : $\sqrt{n^2+n} - an - b = (1-a)n + \frac{1}{2} - b + O\left(\frac{1}{n}\right)$ impose $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, et alors b) montre la divergence. Aucun choix ne convient.

Réponse. a) Converge $\Leftrightarrow \alpha > 2$; b) terme $\sim -\frac{1}{8n}$: diverge ; c) impossible.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : produits infinis

a) (P_N) est croissante et $\ln P_N = \sum_{n=1}^{N} \ln(1+u_n)$. Si $\sum u_n$ converge, $\ln P_N \le \sum u_n$ est majoré : (P_N) converge. Réciproquement, si (P_N) converge, $\ln(1+u_n) \to 0$ donc $u_n \to 0$, et pour n grand, $u_n \le 2\ln(1+u_n)$: $\sum u_n$ converge, majorée par $2 \ln \lim P_N$ à une constante près.

b) Produits télescopiques :

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = N+1 \to +\infty, \qquad \prod_{n=2}^{N} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{N+1}{2N} \to \frac{1}{2}$$

Le premier diverge, conformément à a) (série harmonique).

c) Oui, par a), car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. (On peut montrer que la limite vaut $\frac{\text{sh}\pi}{\pi} \approx 3{,}676$.)

Réponse. Produit et série de même nature ; $\prod(1 + \frac{1}{n}) = N+1$ diverge, $\prod(1 - \frac{1}{n^2}) \to \frac{1}{2}$; $\prod(1 + \frac{1}{n^2})$ converge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).